تمارين محلولة في مختلف الوحدات

مادة العلوم الفيزيائية

3AS

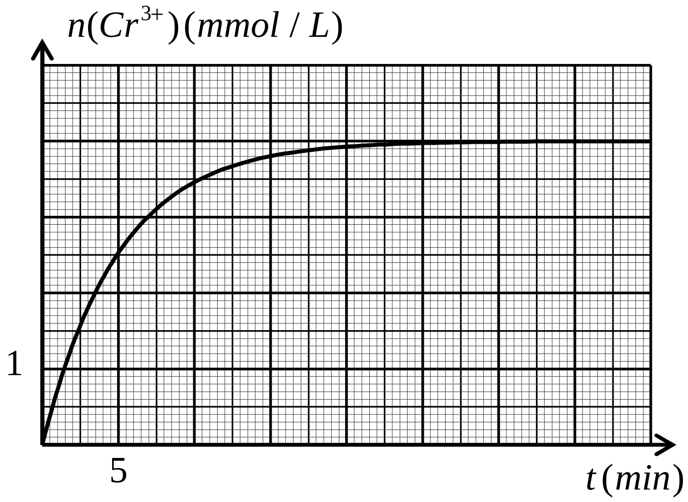
الشعب العلمية

الأستاذ فارس فرقاني

- المتابعة الزمنية لتحول كيمياتئي.
- تطور جملة ميكانيكية.
- دراسة ظواهر كهربائية.
- تطور جملة كيميائية نحو حالة التوازن.
- دراسة تحولات نووية.
- مراقبة تطور جملة كيميائية.

التمرين (1) :

الدراسة التجريبية لتطور حركية التحول بين محلول حمض الأوكساليك $H_2C_2O_4$ وشوارد البيكرومات $Cr_2O_7^{2-}$، عند مزج في اللحظة $t=0$ حجما من محلول حمض الأوكساليك $H_2C_2O_{4\,(aq)}$ مع حجم من محلول بيكرومات البوتاسيوم $(2K^+_{(aq)} + Cr_2O_7^{2-}{}_{(aq)})$، مكّنتنا من رسم المنحنى البياني $n(Cr^{3+}) = f(t)$ (الشكل).



- أحسب السرعة المتوسطة لتشكل شوارد الكروم Cr^{3+} بين اللحظتين $t=5\ min$ ، $t=15\ min$.

الحل المفصل:

- حساب السرعة المتوسطة لتشكل شوارد الكروم Cr^{3+} بين اللحظتين $t=5\ min$ ، $t=15\ min$:

$$v_m(Cr^{3+}) = \frac{\Delta n(Cr^{3+})}{\Delta t} \Rightarrow v_m(Cr^{3+}) = \frac{n_2(Cr^{3+}) - n_1(Cr^{3+})}{t_2 - t_1}$$

و اعتمادا على البيان يكون:

$$v_m(Cr^{3+}) = \frac{(3{,}80 - 2{,}5)\times 10^{-3}}{15-5} = 1{,}30\times 10^{-4}\ mol/\min$$

التمرين (2) :

في حصة الأعمال المخبرية قدم الأستاذ لتلاميذه قارورة لمحلول (S_0) تتمثل في المنظف التجاري المعروف باسم روح الملح كتب على لصاقتها المعلومات التالية:

- الكثافة : $d = 1{,}068$ ، $M(HCl) = 36{,}5\ g.mol^{-1}$.
- النسبة المئوية الكتلية لحمض كلور الهيدروجين $11\ \%$.

وطلب منهم التحقق من النسبة المئوية الكتلية للحمض، لذلك قام التلاميذ بتمديد المحلول (S_0) تركيزه المولي c_0 بـ 200 مرة فحصلوا على محلول (S) تركيزه المولي c، أخذ منه أحد التلاميذ حجما $V = 50\ mL$ ووضعه في دورق ثم أضاف إليه $1\ g$ من كربونات الكالسيوم $CaCO_3$، التحول الكيميائي الحادث يكون منمذج بتفاعل معادلته الكيميائية تكون كما يلي:

$$CaCO_{3(S)} + 2H_3O^+_{(aq)} = Ca^{2+}_{(aq)} + CO_{2(g)} + 3H_2O_{(\ell)}$$

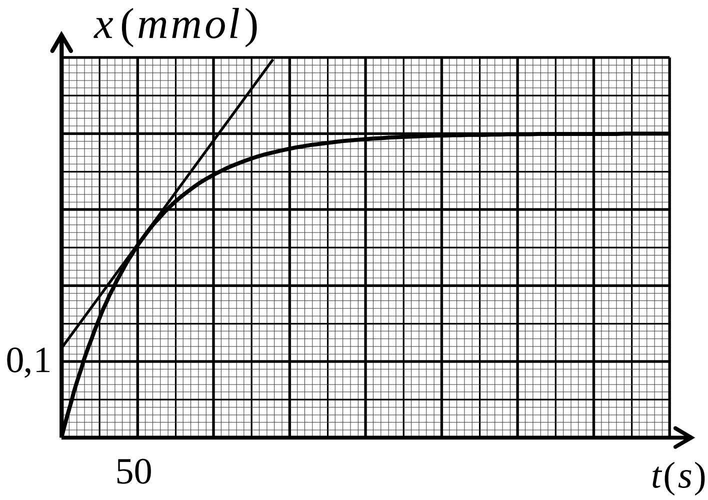
يسمح تجهيز مناسب بقياس حجم غاز ثنائي أكسيد الكربون المتشكل عند لحظات مختلفة في الشرطين النظاميين. النتائج المتحصل وباستعمال برمجية خاصة تمكنا من رسم البيان $x = f(t)$ (الشكل).

1− أنشئ جدولا لتقدم التفاعل.

2- بين أن H_3O^+ هو المتفاعل المحد.

3- أحسب التركيز المولي c للمحول (S) ثم استنتج التركيز المولي c_0 للمحلول (S_0).

4- أحسب النسبة المئوية الكتلية للحمض وتأكد من تطابقة مع القيمة المدونة على بطاقة قارورة روح الملح.



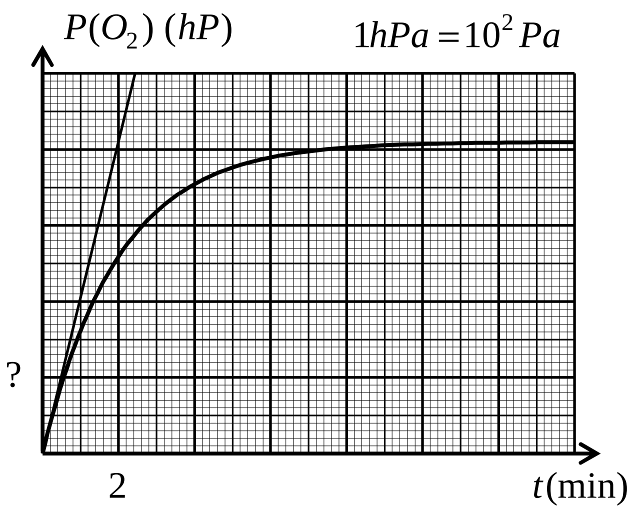
التمرين (3) :

التفكك الذاتي للماء الأكسجيني هو تحول كيميائي تام و بطيء جدا، يمكن تسريعه باستعمال وسيط مثل شوارد الحديد الثلاثي، معادلة التفكك الذاتي هي:

$$2H_2O_{2(aq)} = 2H_2O_{(\ell)} + O_{2\,(g)}$$

في دورق سعته $1L$، نضع حجما $V_S = 20\ mL$ من الماء الأكسجيني تركيزه المولي c ثم نصل الدورق بجهاز قياس الضغط، نجري التجربة في درجة حرارة ثابتة $\theta = 20°C$ وذلك بوضع الدورق في حمام مائي، عند اللحظة $t = 0$ نغمر الوسيط داخل الماء الأكسجيني ، فنلاحظ صعود كثيف لغاز الأكسجين.

المتابعة الزمنية لهذا التحول الكيميائي عن طريق قياس الضغط مكنتنا من رسم البيان الممثل لتطور ضغط غاز الأكسجين المنطلق بدلالة الزمن $P(O_2) = f(t)$ (الشكل).



1- لماذا تمكنا من متابعة هذا التحول الكيميائي عن طريق قياس ضغط غاز ، هل يمكن متابعته عن طريق قياس الناقلية، علل؟

2- نعيد التجربة بتمديد المزيج الابتدائي، ارسم على نفس البيان السابق المنحنى البياني $P(O_2) = g(t)$ في هذه الحالة ، مع التعليل .

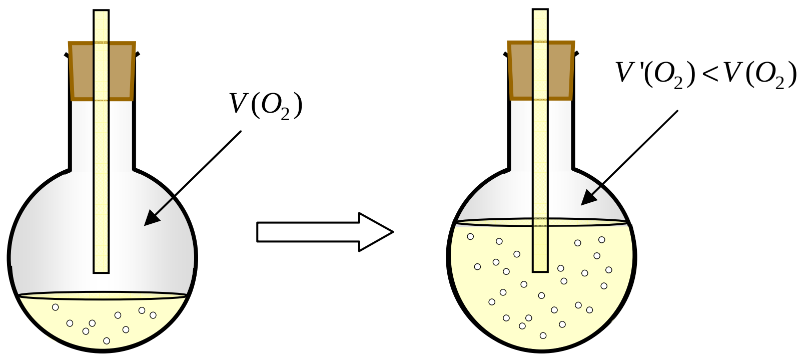
الحل المفصل:

1- سبب تمكنا من متابعة هذا التحول الكيميائي عن طريق قياس ضغط غاز ، وامكانية متابعته عن طريق قياس الناقلية:

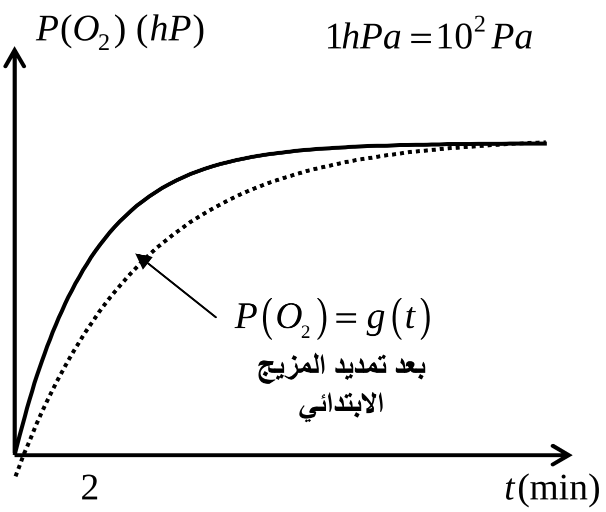
- تمكنا من متابعة هذا التحول عن طريق قياس ضغط غاز كون أنه يوجد غاز ضمن النواتج.
- لا نستطيع متابعة هذا التحول عن طريق قياس الناقلية، لأنه لا توجد شوارد في المزيج التفاعلي.

2- رسم على نفس البيان السابق المنحنى البياني $P(O_2)=f(t)$ عند تمديد المزيج الابتدائي:

عند تمديد المزيج الابتدائي تقل سرعة التفاعل وبالتالي يبلغ التفاعل نهايته في زمن أكبر، كما تزداد قيمة الضغط النهائية لأن حجم الغاز الذي يشغله في الدور يقل(الضغط يتناسب عكسيا مع الحجم).



وعليه يكون المنحنى البياني $P(O_2)=f(t)$ عند تمديد المزيج الابتدائي كما يلي:



التمرين (4) :

يتفكك الماء الأكسجيني ذاتيا وفق تحول كيميائي بطيئا جدا منمذج بالمعادلة الكيميائية التالية:

$$2H_2O_{2(aq)} = 2H_2O_{(\ell)} + O_{2\,(g)}$$

في دورق سعته $1L$، نضع حجما $V_S=20\ mL$ من الماء الأكسجيني تركيزه المولي c ثم نصل الدورق بجهاز قياس الضغط، نجري التجربة في درجة حرارة ثابتة $\theta=20°C$ وذلك بوضع الدورق في حمام مائي، عند اللحظة $t=0$ نغمر الوسيط داخل الماء الأكسجيني ، فنلاحظ صعود كثيف لغاز الأكسجين.

1- مثل جدول تقدم التفاعل.

2- أوجد عبارة التقدم x بدلالة $P(O_2)$، $V(O_2)$، R، T عند اللحظة t، ثم بين أن:

$$x=\frac{x_{max}}{P_{max}(O_2)}P(O_2).$$

3- لو أضفنا للماء الأكسجيني حجما من الماء المقطر وأعدنا التجربة في نفس الشروط، هل ستتغير المقادير التالية:

- زمن نصف التفاعل،
- كمية مادة الأكسجين النهائية،
- الضغط النهائي في الدورق.

الحل المفصل:

1- مثل جدول تقدم التفاعل:

المعادلة		$2H_2O_{2(aq)} = 2H_2O_{(l)} + O_{2(g)}$		
الحالة	التقدم	كمية المادة بـ (mol)		
ابتدائية	$x=0$	$n_0(H_2O_2)=c_0V$	بوفرة	0
انتقالية	x	$n_0(H_2O_2)-x$	بوفرة	x
نهائية	x_{max}	$n_0(H_2O_2)-x_{max}$	بوفرة	x_{max}

2- إيجاد عبارة التقدم x بدلالة $P(O_2)$، $V(O_2)$، R، T عند اللحظة t:

بتطبيق قانون الغاز المثالي:

$P(O_2)=$

هو بين أن:

$$.x=\frac{x_{max}}{P_{max}(O_2)}P(O_2)$$

3- لو أضفنا للماء الأكسجيني حجما من الماء المقطر وأعدنا التجربة في نفس الشروط، هل ستتغير المقادير التالية:

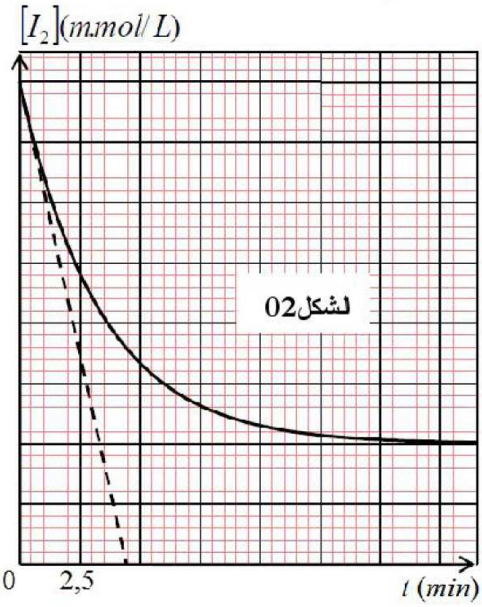
- زمن نصف التفاعل،
- كمية مادة الأكسجين النهائية،
- الضغط النهائي في الدورق.

التمرين (5) :

توجد في المخبر قارورة كتب على ملصقتها مسحوق الزنك $Zn_{(s)}$ غير النقي درجة نقاوته P.

نأخذ من القارورة كتلة قدرها $m'=1,3\ g$، عند درجة حرارة ثابتة، عند اللحظة $t=0$ نسكبها في حوجلة تحتوي على محلول مائي لثنائي اليود $I_{2(aq)}$ حجمه $V=100\ mL$ وتركيزه المولي $c=0,2\ mol/L$.

المتابعة الزمنية للتحول الكيميائي التام الحادث مكنتنا من رسم المنحنى البياني $[I_2]=f(t)$ الممثل لتغيرات التركيز المولي لثنائي اليود بدلالة الزمن (الشكل).



نعيد التجربة السابقة في نفس الشروط ونستعمل نفس كتلة الزنك السابقة على شكل صفيحة مستطيلة الشكل:

1- حدد العامل الحركي المدروس.

2- أعد رسم المنحنى $[I_2]=f(t)$ في هذه الحالة في نفس المعلم للمنحنى السابق مع التعليل.

الحل المفصل:

1- تحديد العامل الحركي المدروس:

هو سطح التلامس.

2- رسم المنحنى $[I_2]=f(t)$ في حالة استعمال صفيحة الزنك بدل مسحوق الزنك:

عند استعمال الصفيحة بدل المسحوق تقل مساحة سطح تلامس الزنك مع المحلول لأن المسحوق يتخلله المحلول عكس الصفيحة، وبنقصان سطح التلامس تقل سرعة التفاعل ويكون المنحنى $[I_2]=f(t)$ في هذه الحالة كما يلي:

التمرين (6) :

نريد اجراء متابعة زمنية لتحول كيميائي بين الألمنيوم Al ومحلول حمض كلور الماء $(H_3O^+{}_{(aq)} + Cl^-{}_{(aq)})$ الذي ينمذج بتفاعل كيميائي تام معادلته:

$$2Al_{(s)} + 6H_3O^+{}_{(aq)} = 2Al^{3+}{}_{(aq)} + 3H_{2(g)} + 6H_2O_{(\ell)}$$

1- أ- أنشئ جدول التقدم للتفاعل الحادث.

2- بين أن كتلة الألمنيوم المتبقية في اللحظة $t = t_{1/2}$ (زمن نصف التفاعل) تعطى بالعبارة: $m_{1/2} = \dfrac{m_0 + m_f}{2}$.

حيث m_f هي كتلة الألمنيوم المتبقية في الحالة النهائية.

الحل المفصل:

1- أ- إنشاء جدول التقدم للتفاعل الحادث:

المعادلة		$2Al_{(s)}$ +	$6H_3O^+{}_{(aq)}$ =	$2Al^{3+}{}_{(aq)}$ +	$3H_{2(g)}$ +	$6H_2O_{(aq)}$
الحالة	التقدم	كمية المادة (mol)				
ابتدائية	$x=0$	$n_0(Al)$	$n_0\left(H_3O^+\right)$	0	0	بزيادة
انتقالية	x	$n_0(Al)-2x$	$n_0\left(H_3O^+\right)-6x$	$2x$	$3x$	
نهائية	x_f	$n_0(Al)-2x_{max}$	$n_0\left(H_3O^+\right)-6x_{max}$	$2x_{max}$	$3x_{max}$	

2- تبيين أن كتلة الألمنيوم المتبقية في اللحظة $t = t_{1/2}$ (زمن نصف التفاعل) تعطى بالعبارة: $m_{1/2} = \dfrac{m_0 + m_f}{2}$

من جدول التقدم:

$$n(Al) = n_0(Al) - 2x \Rightarrow \frac{m(t)}{M} = \frac{m_0}{M} - 2x$$

نضرب الطرفين في M فيصبح:

$$m(t) = m_0 - 2M.x$$

عند اللحظة t_f نكتب:

$$m_f = m_0 - 2M.x_{\max} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ (1)$$

عند اللحظة $t_{1/2}$ نكتب:

$$m_{1/2} = m_0 - 2M.x_{1/2}$$

حسب تعريف $t_{1/2}$ لدينا $x_{1/2}=\dfrac{x_{max}}{2}$ ومنه:

$$m_{1/2}=m_0-2M.\frac{x_{max}}{2}$$

نضرب الطرفين في (2) نجد:

$$2m_{1/2}=2m_0-2M.x_{max}$$

$$2m_{1/2}=m_0+\underbrace{m_0-2M.x_{max}}_{m_f}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (2)$$

من (1) و (2) يكون:

$$2m_{1/2}=m_0+m_f \Rightarrow m_{1/2}=\frac{m_0+m_f}{2}$$

التمرين (7) :

ندخل في اللحظة $t=0$ كتلة مقدارها m_0 من كربونات الكالسيوم داخل حجم $V_a=100\ mL$ من حمض كلور الماء $\left(H_3O^+{}_{(aq)}+Cl^-{}_{(aq)}\right)$ تركيزه المولي c_a. ينمذج التحول الكيميائي الحادث بتفاعل معادلته:

$$CaCO_{3\,(s)}+2H_3O^+{}_{(aq)}=CO_{2(aq)}+Ca^{2+}{}_{(aq)}+3H_2O_{(l)}$$

جدول لتقدم التفاعل السابق، هو كما يلي:

المعادلة		$CaCO_3(s)$	$+\ 2H_3O^+{}_{(aq)}$	$=\ CO_{2(aq)}$	$+\ Ca^{2+}{}_{(aq)}$	$+\ 3H_2O_{(aq)}$
الحالة	التقدم	كمية المادة بـ (mol)				
ابتدائية	$x=0$	$n_0(CaCO_3)$	$n_0(H_3O^+)$	0	0	بوفرة
انتقالية	x	$n_0(CaCO_3)-x$	$n_0(H_3O^+)-2x$	x	x	بوفرة
نهائية	x_{max}	$n_0(CaCO_3)-x_{max}$	$n_0(H_3O^+)-2x_{max}$	x_{max}	x_{max}	بوفرة

- بيِّن أن كتلة كربونات الكالسيوم $m(t)$ في كل لحظة يعبر عنها بالعلاقة:

$$m(t)=m_0-10\left[Ca^{2+}\right](t)$$

يعطى: $M(CaCO_3)=100\,g/mol$

الحل المفصل:

من جدول التقدم:

- $n(CaCO_3)=n_0(CaCO_3)-x\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (1)$
- $n(Ca^{2+})=x\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (2)$

من (2) $x = n(Ca^{2+})$ ، بالتعويض في (1):

$$n(CaCO_3) = n_0(CaCO_3) - n(Ca^{2+})$$

$$n(CaCO_3) = n_0(CaCO_3) - n(Ca^{2+})$$

$$\frac{m}{M} = \frac{m_0}{M} - \left[Ca^{2+}\right]V \Rightarrow$$

$$m = m_0 - (100\times 0,1).\left[Ca^{2+}\right] \Rightarrow m = m_0 - 10\left[Ca^{2+}\right]$$

التمرين (8) :

ندرس حركية التفاعل الحادث بين نوع كيميائي $HCOOCH_2CH_3$ و محلول الصودا $(Na^+{}_{(aq)} + HO^-{}_{(aq)})$ عن طريق قياس ناقلية المزيج التفاعلي بدلالة الزمن .

معطيات :

$$\lambda(Na^+) = 5,00\ mS.m^2/mol \text{ ، } \lambda(HCOO^-) = 5,46\ mS.m^2/mol \text{ ، } \lambda(HO^-) = 20,00$$

▪ يهمل التركيز المولي لشوارد الهيدرونيوم H_3O^+ أمام التركيز المولي لشوارد الهيدروكسيد HO^- .

نحقق عند اللحظة $t = 0$ مزيجا من محلول الصودا حجمه $V_0 = 200\ mL$ تركيزه المولي c_0 و $n_0 = 2\ mmol$ من النوع الكيميائي $HCOOCH_2CH_3$ ، نعتبر حجم المزيج التفاعلي $V = V_0 = 200\ mL$.

معادلة التفاعل التام المنمذج للتحول الحاصل هي:

$$HCOOCH_2CH_{3(\ell)} + HO^-{}_{(aq)} = HCOO^-{}_{(aq)} + CH_3CH_2OH_{(aq)}$$

باستعمال برمجية مناسبة تحصلنا على منحنى الشكل 4 (تطور الناقلية بدلالة تقدم التفاعل).

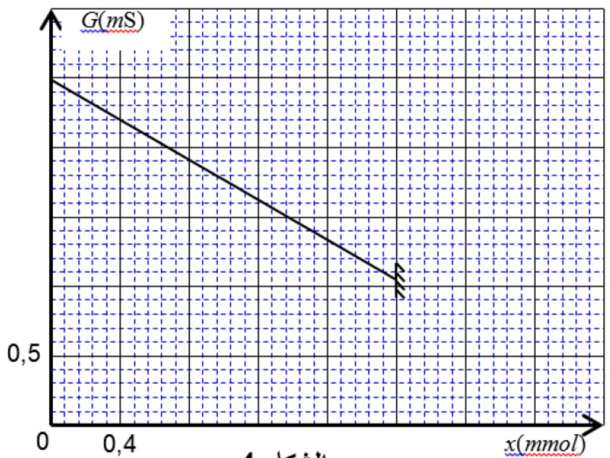
1- انشئ جدولا لتقدم التفاعل.

2- بين أن ناقلية المزيج التفاعلي في لحظة t تكتب بالشكل :

$$G = \frac{K}{V}(\lambda(HCOO^-) - \lambda(HO^-))\,x + Kc_0\,(\lambda(Na^+) + \lambda(HO^-))$$

حيث: K ثابت خلية قياس الناقلية.

3- اعتمادا على المنحنى (الشكل 4)، جِد قيمة كل من ثابت الخلية K والتركيز المولي الابتدائي c_0 .



الشكل 4

الحل المفصل:

1- إنشاء جدول التقدم:

المعادلة		$HCOOCH_2CH_{3(l)}$	$+\ HO^-_{(aq)}$	$=\ HCOO^-_{(aq)}$	$+\ CH_3CH_2OH_{(aq)}$
الحالة	التقدم	كمية المادة (mol)			
ابتدائية	$x=0$	n_0	$n_0(HO^-)=cV$	0	0
انتقالية	x	n_0-x	$n_0(HO^-)-x$	x	x
نهائية	x_f	n_0-x_f	$n_0(HO^-)-x_f$	x_f	x_f

2- تبيين عبارة G ناقلية المزيج التفاعلي في لحظة t:

$$G=K\sigma \Rightarrow G=k\left(\lambda(HO^-)\left[HO^-\right]+\lambda(HCOO^-)\left[HCOO^-\right]+\lambda(Na^+)\left[Na^+\right]\right)$$

واعتمادا على جدول التقدم:

$$G=K\left(\lambda(HO^-)\frac{(n_0(HO^-)-x)}{V}+\lambda(HCOO^-)\frac{x}{V}+\lambda(Na^+)\frac{n_0(Na^+)}{V}\right)$$

$$G=K\left(\lambda(HO^-)\frac{(c_0V-x)}{V}+\lambda(HCOO^-)\frac{x}{V}+\lambda(Na^+)\frac{c_0V}{V}\right)$$

$$G=K\left(\frac{\lambda(HO^-)c_0\cancel{V}}{\cancel{V}}-\frac{\lambda(HO^-)x}{V}+\lambda(HCOO^-)\frac{x}{V}+\lambda(Na^+)\frac{c_0\cancel{V}}{\cancel{V}}\right)$$

$$G=K\left(\lambda(HO^-)c_0-\frac{\lambda(HO^-)x}{V}+\lambda(HCOO^-)\frac{x}{V}+\lambda(Na^+)c_0\right)$$

$$G=\frac{K}{V}\left(\lambda(HCOO^-)-\lambda(HO^-)\right)x+Kc_0\left(\lambda(Na^+)+\lambda(HO^-)\right)$$

3- إيجاد قيمة كل من ثابت الخلية K والتركيز المولي الابتدائي c_0:

بيانيا، المنحنى $G=f(t)$ هو مستقيم لا يشمل المبدأ معادلته من الشكل:

$$G=ax+b$$

ومن البيان:

- $a=\dfrac{\Delta G}{\Delta t}=\dfrac{(2{,}1-5)\times 0{,}5\times 10^{-3}}{(5-0)\times 0{,}1\times 10^{-3}}=-0{,}725\,S/s$
- $b=5\times 0{,}5=0{,}25$

لتصبح معادلة البيان: $G=-0{,}725x+0{,}25$

بالمطابقة مع المعادلة النظرية السابقة نجد:

- $\frac{K}{V}\left(\lambda(HCOO^-)-\lambda(HO^-)\right)=a \Rightarrow K=\frac{V.a}{\lambda(HCOO^-)-\lambda(HO^-)}$

$$K=\frac{0,2\times10^{-3}\times(-0,725)}{(5,46-20)\times10^{-3}}\simeq10^{-2}\,m$$

- $Kc_0\left(\lambda(Na^+)+\lambda(HO^-)\right)=b \Rightarrow c_0=\frac{b}{Kc_0\left(\lambda(Na^+)+\lambda(HO^-)\right)}$

$$c_0=\frac{0,25}{10^{-2}\times(20+5)\times10^{-3}}=0,4\,mol/m^3=4\times10^{-4}\,mol/L$$

التمرين (9) :

لمتابعة تطور التحول الكيميائي بين شوارد اليود $I^-_{(aq)}$ وشوارد البيروكسوديكبريتات $S_2O_8{}^{2-}{}_{(aq)}$، نمزج عند اللحظة $t=0$، حجما V_1 من محلول مائي لبيروكسوديكبريتات البوتاسيوم $\left(2K^+_{(aq)}+S_2O_8{}^{2-}{}_{(aq)}\right)$ تركيزه المولي c_1 مع حجم $V_2=200\,mL$ من محلول مائي ليود البوتاسيوم $\left(2K^+(aq)+I^-(aq)\right)$ تركيزه المولي c_2.

معادلة تفاعل الأكسدة− إرجاع المنمذج للتحول الكيميائي الحادث هي :

$$S_2O_8{}^{2-}{}_{(aq)}+2I^-_{(aq)}=2SO_4{}^{2-}{}_{(aq)}+I_{2(aq)}$$

قيمة سرعة اختفاء شوارد اليود $I^-_{(aq)}$ عند اللحظة $t=1\,min$ هي: $v(I^-)=5,60\times10^{-3}\,mol/\min$، وقيمة السرعة الحجمية للتفاعل عند نفس اللحظة هي: $v_{vol}(t=1\,min)=9,33\times10^{-3}\,mol.L^{-1}.min^{-1}$.

- جِد V_T حجم المزيج التفاعل.

الحل المفصل:

- إيجاد V_T حجم المزيج التفاعل:

$$\begin{cases} v=\frac{dx}{dt} \\ v_{vol}=\frac{1}{V}\frac{dx}{dt}\end{cases} \Rightarrow v_{vol}=\frac{1}{V_T}v \Rightarrow v_{vol}=\frac{v}{V_T} \Rightarrow V_T=\frac{v}{v_{vol}}$$

اعتمادا على معادلة التفاعل، يكون:

$$v=\frac{v(I^-)}{2} \Rightarrow v=\frac{5,60\times10^{-3}}{2}=2,80\times10^{-3}\,mol/\min$$

ومنه:

$$V_T=\frac{2,80\times10^{-3}}{9,33\times10^{-3}}\simeq0,3L \Rightarrow V_T=300\,mL$$

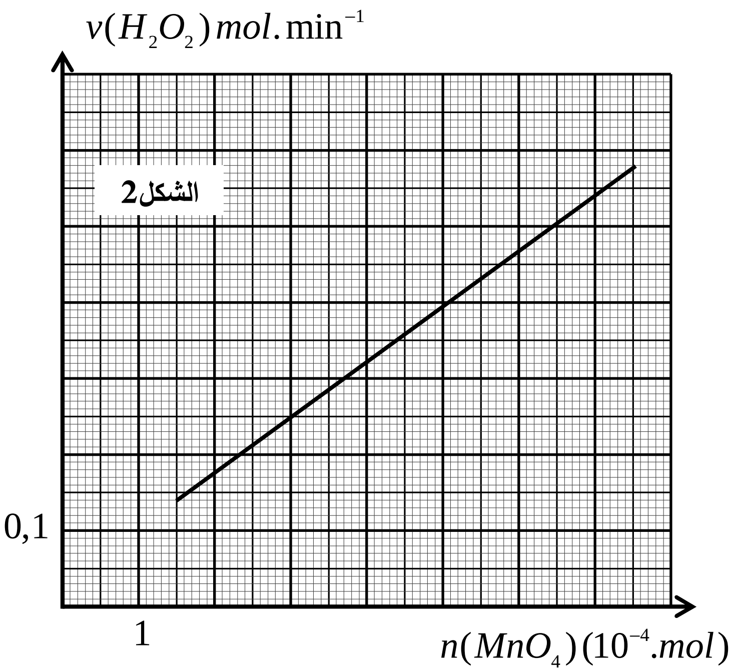
التمرين (10) :

يتحلل بيروكسيد ثنائي الهيدروجين(الماء الأكسجيني) وفق تفاعل بطيء جدًا منمذج بمعادلة التفاعل الكيميائي التالية:

$$2H_2O_{2(aq)} = O_{2(g)} + 2H_2O_{(\ell)}$$

نضيف عند اللحظة $(t = 0)$ كمية قليلة من ثنائي أكسيد المنغنيز (MnO_2) إلى محلول الماء الأكسجيني موجود ببيشر ونتابع تغيرات كمية مادة الماء الأكسجيني المتبقية في المحلول عند عدة لحظات مختلفة، قسنا سرعة اختفاء الماء الأكسجيني عند اللحظة $t = 10\ min$ فوجدنا : $v(H_2O_2) = 0,25 mol / min$.

بعد ذلك نغير كمية مادة الوسيط MnO_2 عدة مرات ونحدد في كل مرة سرعة اختفاء الماء الأكسجيني عند اللحظة $t = 10\ min$، النتائج النتحصل عليها مكنتنا من رسم المنحنى البياني المقابل.



1- أوجد سرعة اختفاء H_2O_2 في غياب الوسيط.

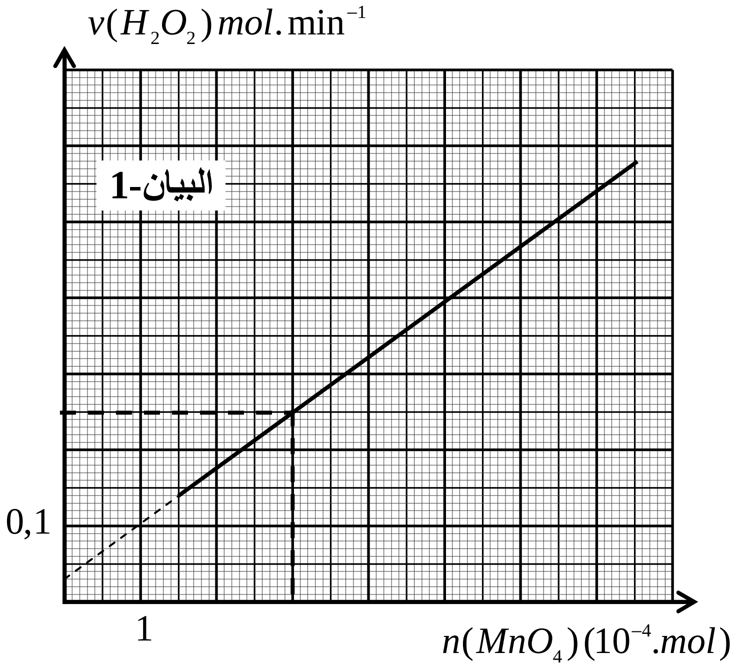
2- ما هي كمية مادة الوسيط MnO_2 عند اللحظة $t = 10\ min$.

3- ماهو تأثير كمية مادة الوسيط على سرعة التفاعل؟

الحل المفصل:

1- سرعة اختفاء H_2O_2 في غياب الوسيط:

سرعة اختفاء H_2O_2 في غياب الوسيط يعني سرعة اختفاء H_2O_2 لما $n\left(MnO_4^-\right) = 0$ ،



بتمديد المنحنى حتى يقطع محور السرعات نجد:

$$v(H_2O_2)=0,3\times 0,1=3\times 10^{-2}mol/min$$

2- كمية مادة الوسيط MnO_2 عند اللحظة $t=10\ min$:

عند اللحظة $t=10\ min$ كانت سرعة تشكل H_2O_2 تساوي: $v(H_2O_2)=0,25\ mol/min$، بالإسقاط في البيان 2- كمية الوسيط عند هذه اللحظة ومن البيان يكون:

$$n(MnO_4^{-})=3\times 10^{-4}mol$$

3- تأثير كمية مادة الوسيط على سرعة التفاعل:

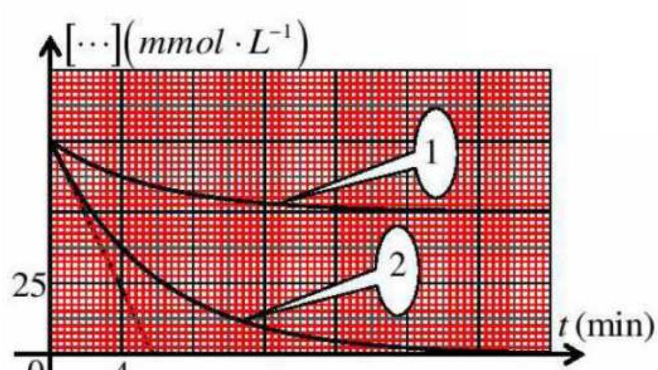
من البيان وبكل وضوح تكون سرعة التفاعل أكبر كلما كانت كمية الوسيط أكبر.

التمرين (11) :

نمزج عند اللحظة $t=0$ حجما $V_1=300\,mL$ من حمض الأكزاليك $H_2C_2O_{4(aq)}$ تركيزه المولي c_1 مع حجم V_2 من محلول ثنائي كرومات البوتاسيوم $(2K^+_{(aq)}+Cr_2O_7^{2-}{}_{(aq)})$ تركيزه المولي $c_2=0,3mol/L$ مع بضع قطرات من حمض الكبريت حيث يبقى حجم المزيج ثابت، التحول الكيميائي الحادث منمذج بمعادلة التفاعل الكيميائي التالية:

$$3H_2C_2O_{4(aq)}+Cr_2O_7^{2-}{}_{(aq)}+8H^+_{(aq)}=6CO_{2(g)}+2Cr^{3+}_{(aq)}+7H_2O_{(l)}$$

المنحنيين(1) و(2) في الشكل المقابل يمثلان دون ترتيب: $[H_2C_2O_4]=f(t)$، $[Cr_2O_7^{2-}]=g(t)$.



الشكل 05

1- انشئ جدولا لتقدم التفاعل.

2- حدد المتفاعل المحد ثم انسب كل منحنى بالتركيز الموافق.

3- اعتمادا على البيان وجدول التقدم جِدْ ما يلي:

أ- قيمة V_2 حجم محلول ثنائي كرومات البوتاسيوم.

ب- قيمة c_1 التركيز المولي لحمض الأكزاليك.

جـ- قيمة x_{max} قيمة التقدم الأعظمي.

الحل المفصل:

1- إنشاء جدول تقدم التفاعل:

المعادلة		$3H_2C_2O_{4(aq)}$	$+\ Cr_2O_7^{2-}{}_{(aq)}$	$+\ 8H^+_{(aq)}$	$=\ 2Cr^{3+}_{(aq)}$	$+\ 6CO_{2(aq)}$	$+\ 7H_2O$
حالة الجملة	التقدم	كمية المادة بـ (mol)					
ابتدائية	$x=0$	$n_0(H_2C_2O_4)$	$n_0(Cr_2O_7^{2-})$	بزيادة	0	0	بزيادة
انتقالية	x	$n_0(H_2C_2O_4)-3x$	$n_0(Cr_2O_7^{2-})-x_{max}$		$2x$	$2x$	
نهائية	x_{max}	$n_0(H_2C_2O_4)-3x_{max}$	$n_0(Cr_2O_7^{2-})-x_{max}$		$2x_{max}$	$2x_{max}$	

2– تحديد المتفاعل المحد:

– بفرض أن $H_2C_2O_4$ متفاعل محد يكون:

$$n_0(H_2C_2O_4)-3x_{max1}=0$$

$$3x_{max1}=n_0(H_2C_2O_4)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (1)$$

– بفرض أن ${Cr_2O_7}^{2-}$ متفاعل محد يكون:

$$n_0({Cr_2O_7}^{2-})-x_{max2}=0$$

$$x_{max2}=n_0({Cr_2O_7}^{2-})\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (2)$$

من البيان: $\left[{Cr_2O_7}^{2-}\right]_0=\left[H_2C_2O_4\right]_0$، وكون أن $H_2C_2O_4$ و ${Cr_2O_7}^{2-}$ موجودين في نفس المزيج التفاعلي يكون:

$$n_0(H_2C_2O_4)=n_0({Cr_2O_7}^{2-})\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (3)$$

من (1)، (2) و(3) يكون:

$$3x_{max1}=x_{\max 2}\ \Rightarrow\ x_{max1}=\frac{x_{\max 2}}{3}\ \Rightarrow\ x_{max1}<x_{\max 2}$$

إذن المتفاعل المحد هو : $H_2C_2O_4$

● المنحنى الموافق لكل تركيز:

المنحنى (2) انتهى عند الصفر وبالتالي هو يوافق لمتفاعل المحد، إذن:

▪ المنحنى (1) يوافق $\left[{Cr_2O_7}^{2-}\right]=g(t)$.

▪ المنحنى (2) يوافق $\left[H_2C_2O_4\right]=f(t)$.

3– أ– حساب قيمة V_1 حجم محلول ثنائي كرومات البوتاسيوم:

اعتمادا على جدول التقدم:

$$\left[{Cr_2O_7}^{2-}\right]_0=\frac{n_0({Cr_2O_7}^{2-})}{V_1+V_2}\Rightarrow\left[{Cr_2O_7}^{2-}\right]_0=\frac{c_2V_2}{V_1+V_2}\Rightarrow\left[{Cr_2O_7}^{2-}\right]_0\times(V_1+V_2)=c_2V_2$$

$$\left(\left[{Cr_2O_7}^{2-}\right]_0\times V_1\right)+\left(\left[{Cr_2O_7}^{2-}\right]_0\times V_2\right)=c_2V_2$$

$$\left[{Cr_2O_7}^{2-}\right]_0\times V_1=c_2V_2-\left(\left[{Cr_2O_7}^{2-}\right]_0\times V_2\right)$$

$$\left[{Cr_2O_7}^{2-}\right]_0\times V_1=V_2\left(c_2-\left[{Cr_2O_7}^{2-}\right]_0\right)\Rightarrow V_2=\frac{\left[{Cr_2O_7}^{2-}\right]_0\times V_1}{c_2-\left[{Cr_2O_7}^{2-}\right]_0}$$

$$V_2=\frac{\left[{Cr_2O_7}^{2-}\right]_0\times V_1}{c_2-\left[{Cr_2O_7}^{2-}\right]_0}$$

من البيان:

$$\left[{Cr_2O_7}^{2-}\right]_0=3\times 25\times 10^{-3}=7{,}5\times 10^{-2}\ mol/L$$

ومنه:

$$V_2 = \frac{7,5\times10^{-2}\times0,3_1}{0,3-\left(7,5\times10^{-2}\right)} = 0,1L$$

ب- حساب قيمة c_2 التركيز المولي لحمض الأكزاليك:

من البيان:

$$[H_2C_2O_4]_0 = \frac{n_0(H_2C_2O_4)}{V_1+V_2} \Rightarrow [H_2C_2O_4]_0 = \frac{c_1V_1}{V_1+V_2} \Rightarrow [H_2C_2O_4]_0\times(V_1+V_2) = c_1V_1$$

$$[H_2C_2O_4]_0\times(V_1+V_2) = c_1V_1 \Rightarrow c_1 = \frac{[H_2C_2O_4]_0\times(V_1+V_2)}{V_1}$$

من البيان:

$$[H_2C_2O_4]_0 = 3\times25\times10^{-3} = 7,5\times10^{-2}\,mol/L$$

ومنه:

$$c_1 = \frac{7,5\times10^{-3}\times(0,3+0,1)}{0,3} = 0,1mol/L$$

جـ- حساب قيمة $x_{\max}$ قيمة التقدم الأعظمي:

بما أن $H_2C_2O_4$ متفاعل محد يكون اعتمادا على جدول التقدم:

$$n_0(H_2C_2O_4) - 3x_{\max} = 0 \Rightarrow c_1V_1 - 3x_{\max} = 0 \Rightarrow x_{\max} = \frac{c_1V_1}{3} \Rightarrow x_{\max} = \frac{0,1\times0,3}{3} = 10^{-2}\,mol/L$$

التمرين (12) :

تتفاعل شوارد البروميد $Br^-_{(aq)}$ مع شاردة البرومات BrO_3^- في وسط حمضي تفاعل تام و بطيء ، لإجراء هذا التحول الكيميائي ، نقوم بمزج حجم $V_1 = 100\ mL$ من محلول برومات البوتاسيوم $(K^+_{(aq)} + BrO_3^-{}_{(aq)})$ تركيزه المولي c_1 مع حجم $V_2 = 200\ mL$ من برومات البوتاسيوم $(K^+_{(aq)} + Br^-_{(aq)})$ تركيزه المولي $c_2 = 0,5\ mol.L^{-1}$. ثم نضيف له قطرات من حمض الكبريت المركز ، يُجري التفاعل في درجة حرارة ثابتة (θ_0) .

1- اكتب المعادلتين النصفيتين للأكسدة و لإرجاع ، ثم استنتج معادلة الأكسدة - إرجاع ، علما أن الثنائيتين الداخلتين في التفاعل هما : $(BrO_3^-{}_{(aq)}/Br_{2(aq)})$ و $(Br_{2(aq)}/Br^-_{(aq)})$.

2- أنشئ جدول تقدم التفاعل .

3- بين أن السرعة الحجمية للتفاعل في لحظة t يمكن كتابة عبارتها على الشكل التالي: $V_{vol} = \frac{1}{9V_1}\frac{dn(Br_2)}{dt}$.

الحل المفصل:

1– كتابة المعادلتين النصفيتين للأكسدة و لإرجاع ، ثم استنتاج معادلة الأكسدة – إرجاع:

$$\begin{array}{l|l} \times 1 & 2BrO_3^- + 2H^+ + 10e^- = Br_2 + 6H_2O \\ \times 5 & 2Br^- = Br_2 + 2e^- \end{array}$$

$$2BrO_3^- + 10Br^- + 12H^+ = Br_2 + 5Br_2 + 6H_2O$$

$$2BrO_3^- + 10Br^- + 12H^+ = 6Br_2 + 6H_2O$$

وبالاختزال نجد:

$$BrO_3^- + 5Br^- + 6H^+ = 3Br_2 + 3H_2O$$

2– إنشاء جدول تقدم التفاعل:

المعادلة		$2BrO_3^-{}_{(aq)}$	$+\ 5Br^-{}_{(aq)}$	$+\ 6H^+{}_{(aq)}$	$=\ 3Br_{2(aq)}$	$+\ 3H_2O_{(l)}$
الحالة	التقدم	كمية المادة بـ (mol)				
ابتدائية	$x=0$	$n_0(BrO_3^-)=c_1V_1$	$n_0(Br^-)=c_2V_2$	بوفرة	0	بوفرة
انتقالية	x	$n_0(BrO_3^-)-2x$	$n_0(Br^-)-5x$	بوفرة	x	بوفرة
نهائية	x_{max}	$n_0(BrO_3^-)-2x_{max}$	$n_0(Br^-)-5x_{max}$	بوفرة	x_{max}	بوفرة

3– إثبات أن السرعة الحجمية للتفاعل في لحظة t يمكن كتابة عبارتها على الشكل التالي: $V_{vol} = \dfrac{1}{9V_1}\dfrac{dn(Br_2)}{dt}$:

$$v_{vol} = \frac{1}{V_T}.\frac{dx}{dt}$$

اعتمادا على جدول التقدم:

$$n(Br_2) = 3x \Rightarrow x = \frac{n(Br^{3+})}{3}$$

بالتعويض نجد:

$$v_{vol} = \frac{1}{V_T}\frac{d}{dt}\left(\frac{n(Br_2)}{3}\right) \Rightarrow v_{vol} = \frac{1}{3V_T}\frac{dn(Br_2)}{dt}$$

لدينا:

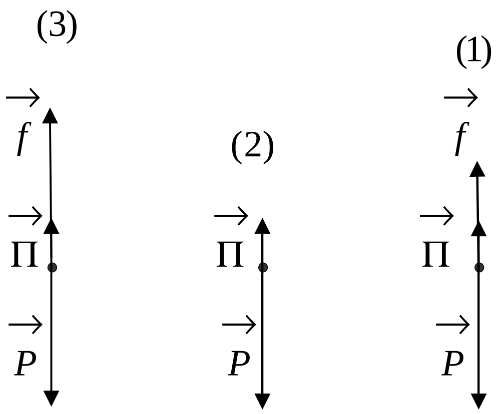
$$\begin{cases} V_1 = 100\,mL \\ V_2 = 200\,mL \end{cases} \Rightarrow V_2 = 2V_1 \Rightarrow V_T = V_1 + V_2 = V_1 + 2V_1 \Rightarrow V_T = 3V_1$$

زمنه يصبح:

$$v_{vol} = \frac{1}{3\times 3V_1}\frac{dn(Br_2)}{dt} \Rightarrow v_{vol} = \frac{1}{9V_1}\frac{dn(Br_2)}{dt}$$

التمرين (13) :

1− يعطى فيما يلي (الشكل1) التمثيل الشعاعي للقوى المطبقة على كرية كتلتها $m = 2,3g$ أثناء حركة سقوطها في الهواء.
رتب هذه الأشكال حسب التزايد الزمني أثناء الحركة. علل.



2− المعادلة التفاضلية التي تحققها سرعة الكرية $v(t)$ من أجل $f = kv^2$ تكون كما يلي:

$$\frac{dv(t)}{dt} + \frac{k}{m}v^2(t) = g$$

- اثبت أن العبارة التجريبية للسرعة اللحظية للكرية تعطى بدلالة تسارع الحركة بالعلاقة التالية:

$$v(t) = \sqrt{64,4 - 6,6a(t)}$$

يعطى: $k = 3,5\times10^{-4}\,kg/m$ ، $g = 9,8\,m/s^2$

الحل المفصل:

1− ترتيب هذه الأشكال حسب التزايد الزمني:

$$(2) \Rightarrow (1) \Rightarrow (3)$$

2− اثبات أن العبارة التجريبية للسرعة اللحظية للكرية تعطى بدلالة تسارع تعطى بالعبارة $v(t) = \sqrt{64,4 - 6,6a(t)}$:

من المعادلة التفاضلية نكتب:

$$a(t) + \frac{k}{m}v^2(t) = g \Rightarrow \frac{k}{m}v^2(t) = g - a(t) \Rightarrow v^2(t) = \frac{m}{k}\left(g - a(t)\right) \Rightarrow v^2(t) = \frac{mg}{m} - \frac{m}{k}a(t)$$

$$v(t) = \sqrt{\frac{mg}{m} - \frac{m}{k}a(t)} \Rightarrow v(t) = \sqrt{\frac{2,3\times9,8}{3,5\times10^{-4}} - \frac{2,3\times10^{-3}}{3,5\times10^{-4}}a(t)} \Rightarrow v(t) = \sqrt{64,4 - 6,6a(t)}$$

التمرين (14) :

يسقط مظلي مصحوبا بلوازمه بدون سرعة ابتدائية من طائرة مروحية متوقفة على ارتفاع $h = 1000m$ من سطح الأرض، سقوطا شاقوليا. نعتبر الجملة (S) المتكونة من المظلي ولوازمه المرجع السطحي الأرضي مرجعا لدراسة الحركة.

المعطيات:

− كتلة المظلي ولوازمه: $m = 80\,kg$.

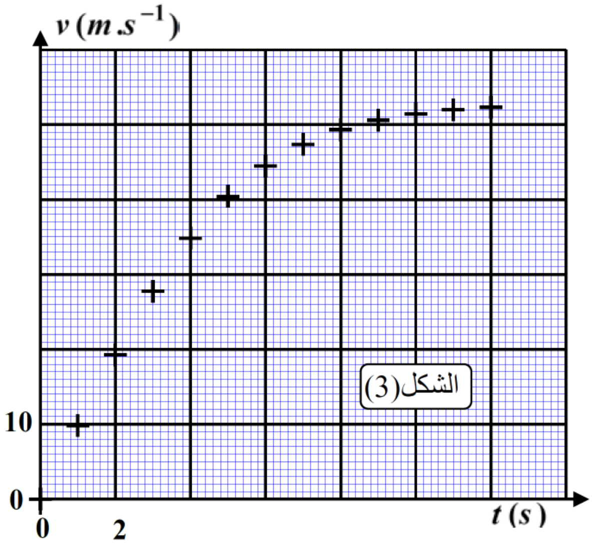
− الجاذبية الأرضية: $g = 9,8\,m/s^2$.

تخضع الجملة (S) أثناء سقوطهاإضافة إلى قوة ثقلها، إلى مقاومة الهواء وتتم حركة سقوطها في مرحلتين:

المرحلة الأولى:

لا يفتح المظلي مظلته. فتخضع الجملة S إلى قوة مقاومة الهواء التي ننمذجها بالعبارة $f = kv^2$ ، بيان الشكل المقابل يمثل تغيرات سرعة الجملة (S) خلال هذه المرحلة.

المرحلة الثانية:



يفتح المظلي مظلته عند اللحظة $t = 12\,s$، لكبح حركته حتى يتمكن من الوصول إلى سطح الأرض بسلام، فتنخفض السرعة حتى تثبت عند قيمتها الحدية $v'_{\lim} = 4,5 m.s^{-1}$ بعد مدة قدرها $\Delta t = 4s$ من فتح المظلة. علما أن فتح المظلة يغير قوة الاحتكاك المطبقة من طرف الهواء فتصبح من الشكل $f = k'.v^2$ ، وتكون المعادلة التفاضلية في هذه المرحلة كما يلي:

$$\frac{dv(t)}{dt} + \frac{k'}{m} v^2(t) = g$$

1– جِدْ العبارة الحرفية للّسرعة الحديّة $v_{\lim}$ في المرحلة الثانية، ثم استنتج قيمة الثابت k'.

2– فسر كيف يكون تغير السرعة بعد فتح المظلة في المرحلة الثانية.

3– مثل بشكل كيفي على(الشكل)، تطور سرعة مركز عطالة الجملة (S) خلال الزمن لكامل السقوط في المرحلتين.

<u>الحل المفصل:</u>

<u>1– إيجِدْ العبارة الحرفية للّسرعة الحديّة في المرحلة الثانية:</u>

من المعادلة التفاضلية، وفي النظام الدائم أين: $v(0) = v_{\lim}$ ، $\left(\frac{dv}{dt}\right)_{t=\infty} = 0$ ، نكتب:

$$\frac{k'}{m} v_{\lim}{}^2 = g \Rightarrow v_{\lim} = \sqrt{\frac{mg}{k'}}$$

<u>● استنتاج قيمة الثابت k':</u>

من عبارة السرعة الحدية السابقة:

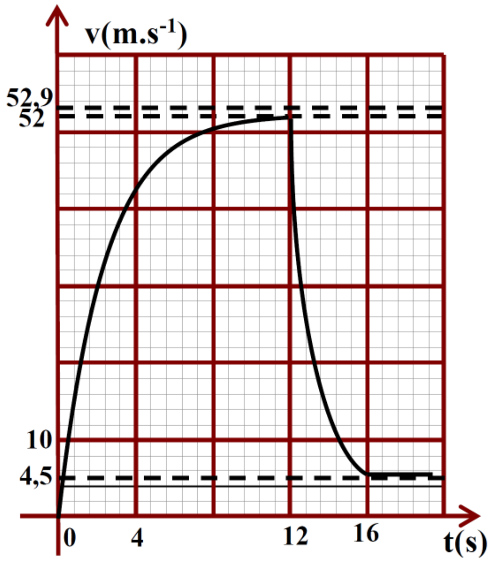
$$\frac{k'}{m} v_{\lim}{}^2 = g \Rightarrow k' = \frac{mg}{v_{\lim}^2} \Rightarrow k' = \frac{80 \times 9,8}{4,5^2} = 38,72\ kg/m\,.$$

<u>2– تفسير كيف يكون تغير السرعة بعد فتح المظلة في المرحلة الثانية:</u>

قبل فتح المظلة كانت الجملة في نظام دائم، تكون عنده شدة قوة الاحتكاك $\vec{f}$ تساوي شدة قوة الثقل $\vec{P}$ ، وتكون عندئذ محصلة القوى الخارجية معدومة، ولكن عند فتح المظلة تزداد شدة قوة الاحتكاك $\vec{f}$ في حين لاتتغير شدة قوة الثقل $\vec{P}$ ، فتصبح محصلة القوة متجهة نحو الأعلى عكس جهة الحركة(السقوط) وتكون عندئذ حركة الجملة (S) متباطئة قبل أن تبلغ النظام الدائم من جديد.

3- تمثيل بشكل كيفي تطور سرعة مركز عطالة الجملة (S) خلال الزمن لكامل السقوط في المرحلتين:

اعتمادا على ما سبق يكون حركة الجملة (S) متسارعة ثم منتظمة في المرحلة الثانية، ثم تصبح بعد فتح المظلة في المرحلة الثانية متباطئة قبل أن تبلغ سرعتها قيمة حدية $v_{\lim}' = 4,5 m/s$ ، فيكون تمثيل سرعة مركز عطالة الجملة (S) خلال المرحلتين كما يلي:



التمرين (15) :

إن مراقبة حركة بعض كواكب المجموعة الشمسية مكنتنا من جدول القياسات التالي :

المشتري	المريخ	الأرض	الكوكب
11,86		1,00	$T\,(ans)$
	1,53	1,00	$r\ (U.A)$

حيث : T هو دور الكوكب حول الشمس بالسنة الضوئية ، r البعد بين مركزي الكوكب و الشمس بالوحدة الفلكية $U.A$ ، $1U.A = 1,5\times10^{11} m$ و $1an\ = 365\ jours$ ، $G = 6,67\times10^{-11}\ SI$ ، $M_S\ = 2\times10^{30}\ kg$.

1- أكمل الجدول أعلاه .

2- تعطى عبارة السرعة المدارية بالعلاقة : $v = \sqrt{\dfrac{G.M_S}{r}}$ ، احسب السرعة المدارية v لكوكبي الأرض والمريخ بـ $km.s^{-1}$.

3- ما معنى السنة المدارية.

4- فسر لماذا تكون السنة الأرضية أقل من السنة المريخية.

5- يوجد تشابه واضح بين النظامين الكوكبي و الذري ، إلا أنه لا يمكن تطبيق قوانين نيوتن على النظام الذري . بين محدودية قوانين نيوتن.

الحل المفصل:

1- إكمال الجدول:

▪ حساب t_m (دور كوكب المريخ حول الشمس):

حسب القانون الثالث لكبلر :

$$\frac{T_t^2}{r_t^3}=\frac{T_m^2}{r_m^3} \Rightarrow T_m=\sqrt{\frac{T_t^2.r_m^3}{r_t^3}} \Rightarrow T_m=\sqrt{\frac{(1)^2.(1,53)^3}{(1)^3}}=1,89\,s$$

▪ حساب r_J (نصف قطر مدار المشتري):

حسب القانون الثالث لكبلر :

$$\frac{T_t^2}{r_t^3}=\frac{T_J^2}{r_J^3} \Rightarrow r_J=\sqrt[3]{\frac{T_J^2.r_t^3}{T_t^2}} \Rightarrow r_J=\sqrt[3]{\frac{(11,86)^2.(1)^3}{(1)^2}}=5,20\,U.A$$

ويكون الجدول كما يلي:

الكوكب	الأرض	المريخ	المشتري
$T\,(ans)$	$1,00$	$5,20$	$11,86$
$r\ (U.A)$	$1,00$	$1,53$	$29,8$

2- حساب السرعة المدارية v لكوكبي الأرض والمريخ بـ $km.s^{-1}$:

▪ بالنسبة لكوكب الأرض:

$$v_t=\sqrt{\frac{G.M_S}{r_T}} \Rightarrow v_t=\sqrt{\frac{1,67\times10^{-11}\times2\times10^{30}}{1,5\times10^{11}}}=2,98\times10^4\,m/s$$

▪ بالنسبة لكوكب المريخ:

$$v_m=\sqrt{\frac{G.M_S}{r_m}} \Rightarrow v_t=\sqrt{\frac{1,67\times10^{-11}\times2\times10^{30}}{2,39\times1,5\times10^{11}}}=23,6\times10^4\,m/s$$

3- معنى السنة المدارية:

السنة المدارية تعني المدة الذي يستغرقها كوكب لإنجاز دور واحدة.

4- تفسير لماذا تكون السنة الأرضية أقل من السنة المريخية:

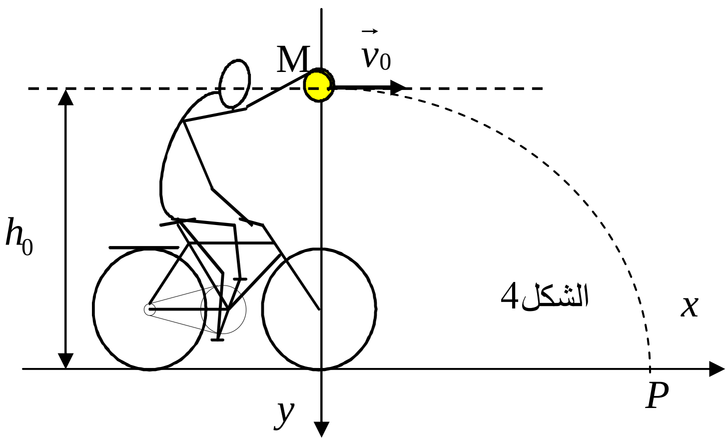
السرعة المدارية للأرض أكبر من السرعة المدارية للمريخ كما أن نصف مدار الأرض أقل من نصف قطر مدار الكوكب، هذا يجعل مدة دوران الأرض حول الشمس اقل من مدة دوران المريخ حول الشمس، وبالتالي السنة المدارية للأرض أقل من السنة المدارية للمريخ.

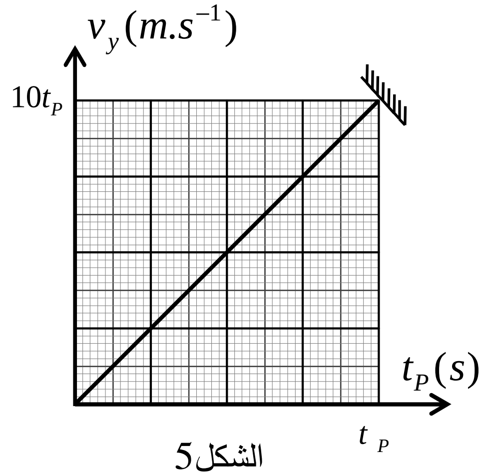
5- تبيين محدودية قوانين نيوتن:

ميكانيك نيوتن لا يسمح بوصف الظواهر الفيزيائية على المستوي الذري، حيث تكون التبادلات الطاقوية مكممة.

التمرين (16) :

من موضع M ، ترك دراج كرة تنس كتلتها m تسقط في اللحظة $t=0$ من نقطة ترتفع عن سطح الأرض بمقدار $h_0=1,8m$ وهو يتحرك بحركة مستقيمة منتظمة بسرعة $v=2m.s^{-1}$، بالنسبة لمرجع سطحي أرضي منسوب إليه معلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ متعامد. نعتبر تأثيرات الهواء على الكرة مهمل و يؤخذ: $g=10m.s^{-2}$.



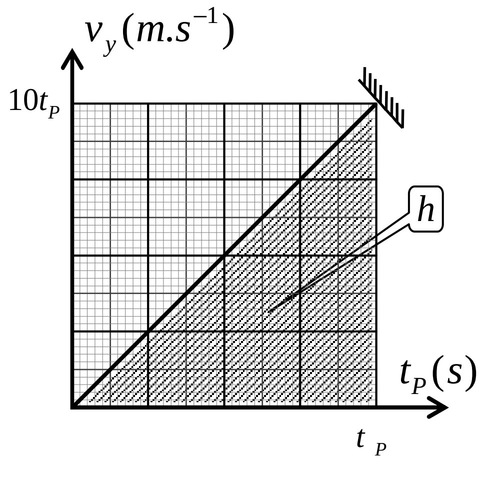


● اعتمادا على المنحنى $v_y(t)$ المقابل أوجد t_p لحظة وصول الكرة إلى الأرض في الموضع P.

الحل المفصل:

● إيجاد t_p لحظة وصول الكرة إلى الأرض في الموضع P:

الارتفاع h يمثل المسافة الشاقولية المقطوعة من طرف الكرة بين اللحظتين $t=0$ و t_P، وباستخدام طريقة المساحة في حساب المسافة، واعتمادا على البيان يكون:



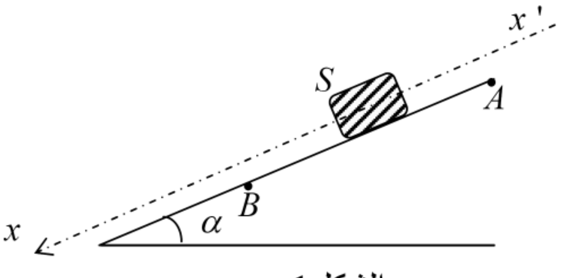
$$h=\frac{10t_P\times t_P}{2} \Rightarrow h=\frac{10t_P{}^2}{2}$$

$$h=5t_P{}^2 \Rightarrow t_P=\sqrt{\frac{h}{5}}$$

$$t_P=\sqrt{\frac{1,8}{5}}=0,6m$$

التمرين (17) :

نعتبر $g=10\ m/s^2$ وقوى الإحتكاك على المستوي المائل تكافئ قوة وحيدة $\vec{f}$ ثابتة الشدة ومعاكسة لجهة الحركة. نقذف عند اللحظة $t=0$ جسما صلبا (S) كتلته $m=100\ g$ بسرعة ابتدائية v_0 من نقطة A مبدأ الفواصل لنزلق على المحور (xx') المنطبق على خط الميل الأعظم لمستوي مائل يميل بزاوية $\alpha = 30°$ عن الأفق ليتوقف عند النقطة B . كما موضع بالشكل1.



الشكل1.

إذا علمت أن المعادلتين الزمنيتين $x(t)$، $v(t)$ لحركة لمركز عطالة الجسم (S) تكتبان على الشكل:

$$v = at + v_0$$
$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t$$

● بين أن مربع سرعة الجسم بدلالة المسافة x تعطى بالعلاقة: $v^2 = ax + v_0$.

الحل المفصل:

● إثبات $v^2 = ax + v_0$:

- $v = at + v_0$ .... (1)
- $x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t$ .... (2)

بتربيع طرفي العلاقة (1):

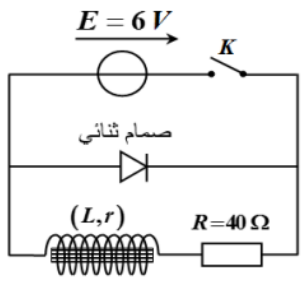
$$v^2 = (at+v_0)^2 \Rightarrow v^2 = a^2t^2 + 2avt + v_0^2$$
$$v^2 = 2a\underbrace{(\frac{1}{2}a^2t^2 + vt)}_{x} + v_0^2$$

واعتمادا على العلاقة (1) يصبح:

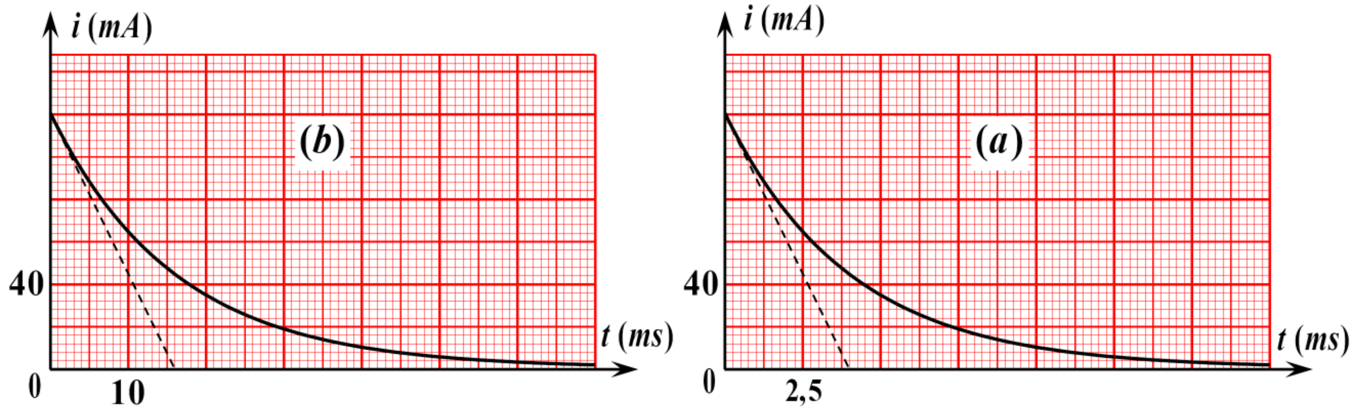
$$v^2 = 2ax + v_0^2$$

التمرين (18) :

حقق فريق من التلاميذ الدارة الكهربائية المبينة في (الشكل5)، تجربتين الأولى كانت بداخل الوشيعة نواة حديدية والثانية كانت الوشيعة دون نواة حديدية، بواسطة برنامج خاص تمكنا من الحصول على البيانين (a) و (b) (الشكل6) الذين يمثلان تطور شدة التيار الكهربائي $i(t)$ الذي يجتاز الدارة لكل من التجربتين دون ترتيب.



الشكل-5



الشكل-6

● حدد المنحنى الموافق لكل تجربة.

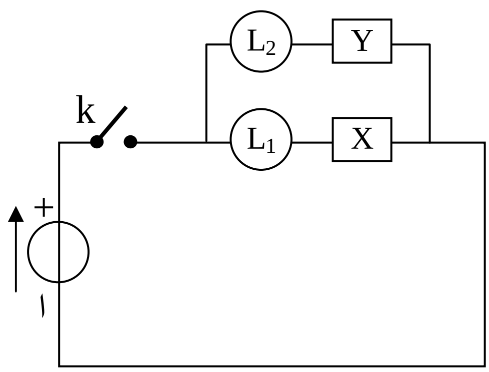
الحل المفصل:

● تحديد المنحنى الموافق لكل تجربة:

وجود النواة داخل الوشيعة تزيد من قيمة ذاتيتها L ، وبالتالي تزداد قيمة ثابت الزمن $\tau=\dfrac{L}{R+r}$ ، معنى هذا أن المنحنى الذي يوافق التجربة الأولى (وجود النواة الحديدية) هو المنحنى الذي تكون عنده قيمة τ أكبر وهو المنحنى (b) ، إذن:

- المنحنى (a) يوافق التجربة (1).
- المنحنى (b) يوافق التجربة (2).

التمرين (19) :



قدم أستاذ في حصة الأعمال المخبرية لفوج من التلاميذ علبتين مغلقتين ومتماثلتين X و Y تحتوي إحداهما على مكثفة فارغة والثانية على وشيعة مقاومتها مهملة وهذا من أجل معرفة طبيعة ثنائي القطب الذي تحتويه كل علبة.

1- قام أعضاء الفوج بتركيب الدارة الكهربائية (الشكل)، عند غلق القاطعة لاحظوا:

- اشتعال المصباح L_1 .
- اشتعال المصباح L_2 لوقت قصير ثم انطفأ.

1- حدد ثنائي القطب الذي تحتويه كل علبة مع التعليل.

2- قام أحد التلاميذ باستبدال كل مصباح بمقياس أمبير ذو مؤشر، صف بدقة كيف ينحرف كل مؤشر بعد غلق القاطعة مباشرة .

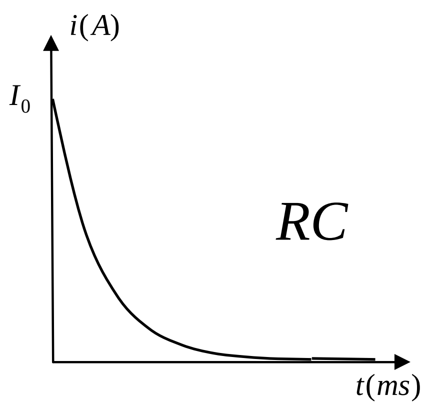
الحل المفصل:

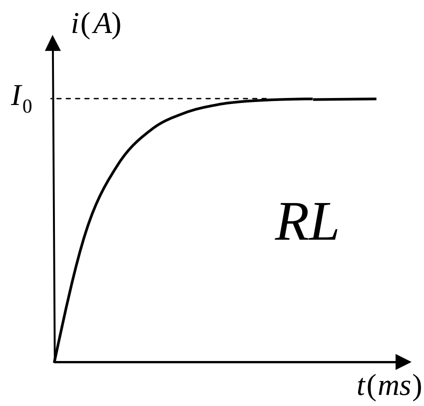
1- تحديد ثنائي القطب الذي تحتويه كل علبة مع التعليل:

- في ثنائي القطب RC يجتاز الدارة تيار كهربائي لفترة وجيزة ثم ينقطع وسبب ذلك هو العازل الموجود بين اللبوسين، وهذا ما حدث في المصباح L_2، الموصول على التسلسل مع العلبة Y، إذن العلبة Y تحتوي على المكثفة.

- في ثنائي القطب RL تمانع الوشيعة التيار الكهربائي الذي يجريه المولد لفترة وجيزة وبعدها يبلغ قيمة حدية يثبت عندها (نظام دائم)، وهذا ما حدث في المصباح L_1، الموصول على التسلسل مع العلبة X، إذن العلبة X تحتوي على الوشيعة.

2- وصف كيف ينحرف كل مؤشر بعد غلق القاطعة مباشرة:





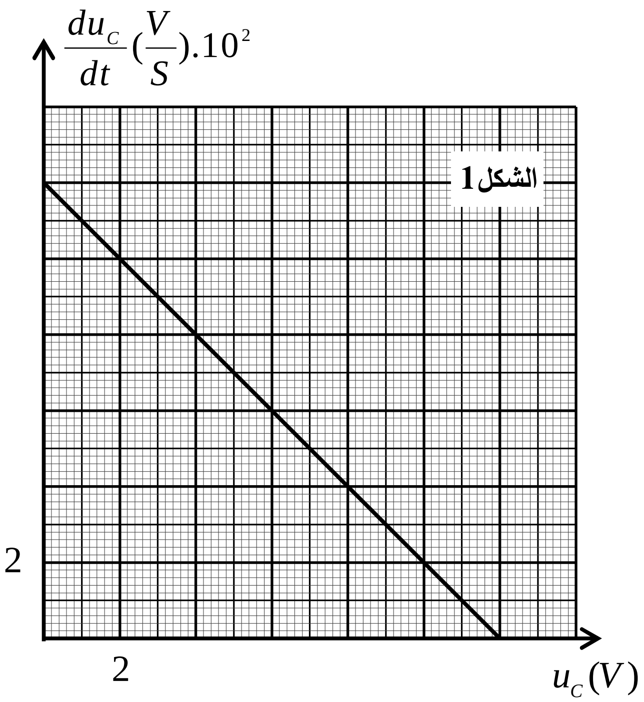
- بالنسبة لمقياس الأمبير الموصول على التسلسل مع المكثفة (العلبة Y)، ينحرف المؤشر آنيا إلى قيمة أعظمية ثم يعود تدريجيا إلى الصفر.

- بالنسبة لمقياس الأمبير الموصول على التسلسل مع الوشيعة (العلبة X)، ينحرف المؤشر تدريجيا ابتداء من القيمة صفر إلى أن يبلغ قيمة أعظمية يثبت عندها.

التمرين (20) :

نربط على التسلسل العناصر الكهربائية التالية : ناقل أومي مقاومته $R = 100\Omega$، مجموعة من المكثفات المتماثلة عددها (n) سعتها الواحدة $c_0 = 5\times10^{-4}\,F$ مربوطة بنمط واحد (إما تسلسل أو تفرع)، مولد ذو توتر كهربائي ثابت $E = 12\ V$، قاطعة (K).

لإظهار التطور الزمني للتيار الكهربائي المار في الدارة نصل مجموعة المكثفات ذات سعة مكافئة C، براسم اهتزاز ذي ذاكرة، ثم نغلق الدارة في اللحظة $t = 0$، نمثل بيانيا بواسطة برنامج معلومات البيان $\frac{du_C}{dt} = f(t)$ (الشكل3).



المعادلة التفاضلية التي يحققها التوتر $u_C(t)$ بين مجموعة المكثفات هي من الشكل: $\frac{du_C}{dt}+\frac{1}{\tau}u_C=\frac{E}{\tau}$

1− أحسب قيمة C_e سعة المكثفة المكافئة لمجموعة المكثفات، ثم استنتج نمط ربط هذه المكثفات(على التفرع أن على التسلسل).

2− جِدْ قيمة العدد n.

<u>الحل المفصل:</u>

<u>1− حساب قيمة C سعة المكثفة المكافئة لمجموعة المكثفات:</u>

بيانيا: المنحنى $\frac{du_C}{dt}=f(t)$ هو مستقيم لا يشمل المبدأ معادلته من الشكل:

$$\frac{du_C}{dt}=at+b$$

ومن البيان:

- $a=\frac{(0-6)\times 2\times 10^2}{(6-0)\times 2}=10^2\,V/s$.
- $b=6\times 2\times 10^2=1,2\times 10^3$

ومعادلة البيان تصبح: $\frac{du_C}{dt}=10^2 t+1,2\times 10^3$.

نظريا ومن المعادلة التفاضلية:

$$\frac{du_C}{dt}+\frac{1}{\tau}u_C=\frac{E}{\tau}\Rightarrow\frac{du_C}{dt}=-\frac{1}{\tau}u_C+\frac{E}{\tau}\Rightarrow\frac{du_C}{dt}=-\frac{1}{RC_e}u_C+\frac{E}{\tau}$$

بالمطابقة بين المعادلتين البيانية والنظرية نجد:

$$-\frac{1}{RC_e}=a\Rightarrow C_e=-\frac{1}{R.a}\Rightarrow C_e=-\frac{1}{100\times 10^2}=10^{-4}\,F$$

<u>● استنتاج نمط ربط هذه المكثفات(على التفرع أن على التسلسل):</u>

اعتمادا مما سبق: $C_e<C_0$، ومنه المكثفات المتمثلة موصولة على التسلسل.

<u>2− إيجاد قيمة العدد n:</u>

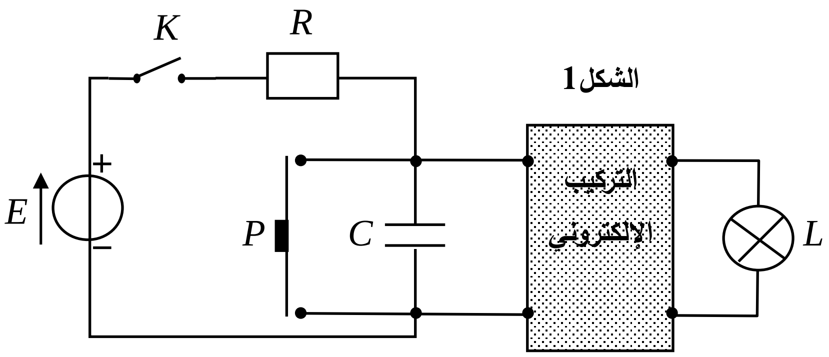
المكثفات المتمثلة والتي عددها n موصولة على التسلسل لذا يكون:

$$\frac{1}{C_e}=\underbrace{\frac{1}{C_0}+\frac{1}{C_0}+.......+\frac{1}{C_0}}_{n\text{ مرة}}\Rightarrow\frac{1}{C_e}=\frac{n}{C_0}\Rightarrow n=\frac{C_0}{C_e}\Rightarrow n=\frac{5\times 10^{-4}}{10^{-4}}=5$$

إذن عدد المكثفات المتماثلة هو: $n=5$.

التمرين (21) :

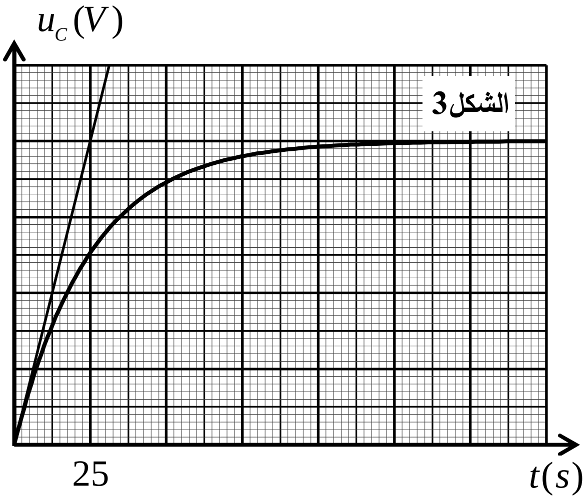
نحقق التركيب المبين في (الشكل1) والذي يمثل مخطط الدارة لميقاتية الإنارة (*minuterie*). حيث نصل مولد للتوتر الثابت قوته المحركة الكهربائية $E = 12\,V$، ومكثفة سعته $C = 120\ \mu F$ مع ناقل أومي مقاومته R بتركيب إلكتروني يتحكم في اشتعال مصباح.



– يشتعل المصباح عندما يكون التوتر u_C بين طرفي المكثفة أصغر من قيمة حدية $u_{C\ell} = 6V$.

– ينطفئ المصباح عندما يكون التوتر u_C بين طرفي المكثفة أكبر من قيمة حدية $u_{C\ell} = 6V$ أو يساويه.

– يتحكم في اشتعال المصباح بزر ضاغط P، عندما نضغط عليه يدخل هذا الأخير في تلامس مع مربطي المكثفة ويسلك سلوك ناقل أومي مقاومته مهملة فتتفرغ المكثفة لحظيا (تصبح شحنتها معدومة بمجرد الضغط على الزر P) وعندما نرفع الضغط على الزر P في اللحظة t = 0 تصبح المكثفة موصولة مع المولد من جديد فتبدأ عملية شحن المكثفة إلى أن تشحن كليا.



نغلق القاطعة عند اللحظة $t = 0$، المعادلة التفاضلية التي يحققها التوتر $u_C(t)$ بين طرفي المكثفة هي: $\frac{du_C(t)}{dt} + \frac{1}{RC}u_C(t) = E$ وحلها هو $u_C = E(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$.

– منحنى (الشكل-3) يمثل تطور التوتر بين طرفي المكثفة بعد رفع الضغط على الزر P:

1- عين قيمة ثابت الزمن τ.

2- المكثفة قبل الضغط على الزر P مشحونة تحت توتر قدره $E = 12V$، المصباح يكون منطفئ أم مشتعل. لماذا؟

3- نضغط على الزر الضاغط P، هل يشتعل المصباح؟ برر إجابتك.

4- نرفع الضغط عن الزر P:

أ- أحسب مدة اشتعال المصباح قيمة t_ℓ.

ب- نريد الزيادة في مدة اشتعال المصباح. ما هو الحل الذي تقترحه برأيك مع الشرح.

الحل المفصل:

1- تعيين قيمة τ بيانيا:

من البيان: $\tau = 25\ s$.

2- المصباح يكون منطفئ أم مشتعل قبل الضغط على الزر P:

المصباح منطفئ لأن توتر المكثفة $u_C = 12V$ أكبر من التوتر الحدي $u_C = 6\ V$، علما أن المصباح يكون مشتعل عندما يكون التوتر u_C بين طرفي المكثفة أقل من التوتر الحدي $(u_C < u_\ell)$.

3- المصباح يشتعل أم لا عند الضغط على الزر P:

عندما نضغط على الزر P ينعدم التوتر بين طرفي المكثفة، في هذه الحالة $u_C < u_\ell$ وعليه المصباح يشتعل.

4- أ- حساب مدة اشتعال المصباح قيمة:

- مدة اشتعال المصباح t_ℓ هي لحظة بلوغ التوتر u_C بين طرفي المكثفة قيمته الحدية u_ℓ أي:

$$t = t_\ell \Rightarrow u_C = u_\ell$$

بالتعويض في العبارة $u_C = E(1-e^{-t/\tau})$ نجد:

$$u_\ell = E(1-e^{-t_\ell/\tau}) \Rightarrow u_\ell = E - Ee^{-t_\ell/\tau} \Rightarrow Ee^{-t_\ell/\tau} = E - u_\ell \Rightarrow e^{-t_\ell/\tau} = \frac{E-u_\ell}{E}$$

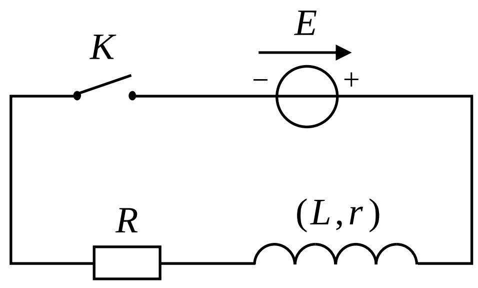
$$\frac{-t_\ell}{\tau} = \ln\left(\frac{E-u_\ell}{E}\right) \Rightarrow t_\ell = -\tau.\ln\left(\frac{E-u_\ell}{E}\right)$$

$$t_\ell = -25 \times \ln\left(\frac{12-6}{12}\right) = 17,32\,s$$

ب- الحل المقترح لزيادة مدة اشتعال المصباح:

لزيادة اشتعال المصباح نزيد من قيمة t_ℓ، نبطئ عملية التفريغ، من خلال رفع قيمة ثابت الزمن $\tau = RC$، وذلك بزيادة قيمة سعة المكثفة C أو مقاومة الناقل الأومي R أو كلاهما.

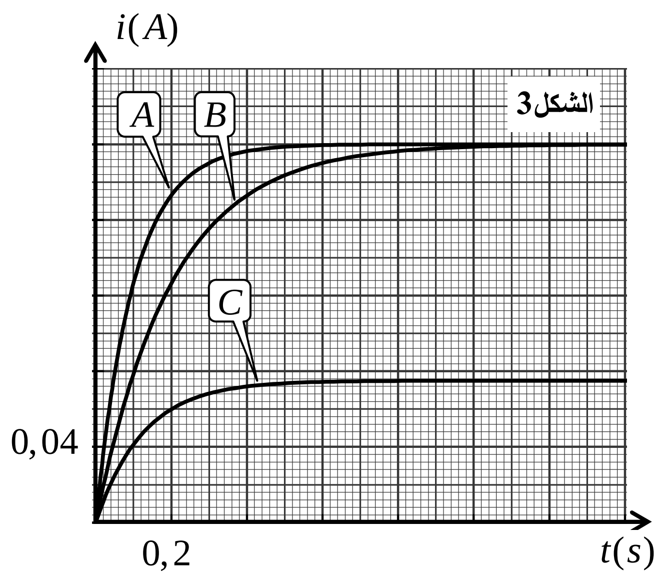
التمرين (22) :



الشكل1

الدارة الكهربائية المبينة في (الشكل1) تتكون من العناصر التالية موصولة على التسلسل:

- مولد كهربائي للتوتر قوته المحركة الكهربائية $E = 9\,V$.
- ناقل أومي مقاومته R.
- وشيعة ذاتيتها L ومقاومتها الداخلية $r = 10\ \Omega$.



في اللحظة $t = 0$ نغلق القاطعة K، بواسطة الـ $ExAO$ وبرمجية خاصة تمكنا من الحصول على المنحنيات البيانية (A)، (B)، (C) الممثلة لتطور شدة التيار الكهربائي $i\,(t)$ بدلالة الزمن τ بالنسبة للتجارب الثلاث التالية من دون ترتيب ومن أجل قيم مختلفة لمقاومة الناقل الأومي R وقيم مختلفة لذاتية الوشيعة L مع تثبيت القوة المحركة الكهربائية E

للمولد والمقاومة الداخلية r للوشيعة، وفق الجدول التالي:

	التجربة (1)	التجربة (2)	التجربة (3)
$L\,(mH)$	15	10	20
$R\ (\Omega)$	120	90	90

● حدد دون حساب ومع التعليل المنحنى الموافق لكل تجربة.

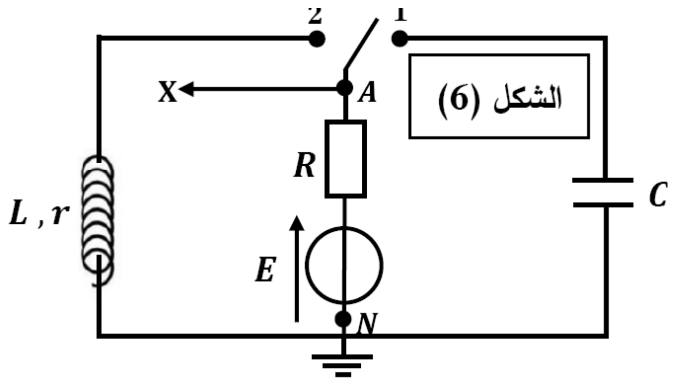
الحل المفصل:

في التجربتين الموافقتين للمنحنيين (A)، (B) تكون شدة التيار الأعظمية $I_0=\dfrac{E}{R+r}$ نفسها، هذا يتوافق مع التجربتين (2) و(3) (فيهما نفس المقاومة R)، والتجربة الموافقة للمنحنى (C) هي التجربة(1) لأن فيها مقاومة R أكبر وبالتالي شدة تيار كهربائي أعظمية أقل.

قيمة ثابت الزمن $\tau=\dfrac{L}{R+r}$ في التجربة الموافقة المنحنى (A) أقل من قيمة ثابت الزمن τ في التجربة الموافقة للمنحنى (B) وهذا يوافق التجربة(1) (لأن في التجربة (1) قيمة الذاتية L أقل)

وعليه: المنحنى (A) يوافق التجربة (2)، المنحنى (B) يوافق التجربة (3)، المنحنى (C) يوافق التجربة (1).

التمرين (23) :

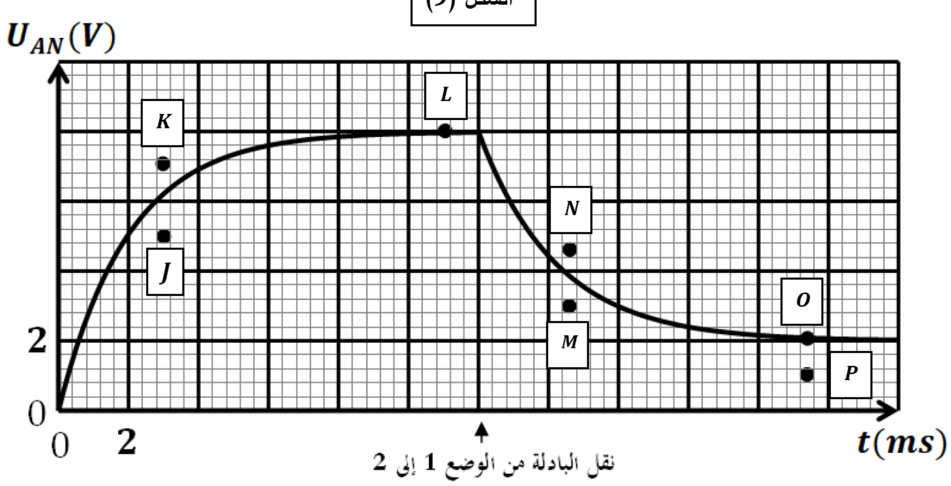


نحقق الدارة المبينة في (الشكل6)، على مرحلتين:

المرحلة الأولى نضع البادلة في الوضع (1) وفي المرحلة الثانية بعد مدة زمنية من المرحلة الأولى نضعها البادلة في الوضع(2).

يوضح (الشكل9) تطور التوتر $u_{AN}(t)$ المتحصل عليه خلال المرحلتين المذكورتين من أجل المقاومة $R=125\Omega$.

الشكل (9)



نستبدل المقاومة R ، بمقاومة R' أكبر منها $(R' > R)$،

- من بين النقاط: J ، L ، L ، M ، N ، O وP ، ما هي النقط التي سيمر بها المنحنى $u_{AN}(t)$ في هذه الحالة مع التعليل؟

الحل المفصل:

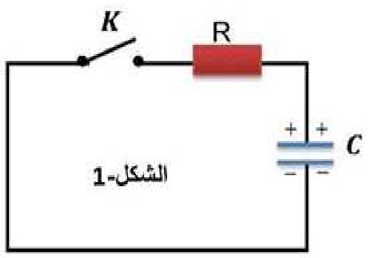
- النقاط التي سيمر بها المنحنى $u_{AN}(t)$ من أجل $(R' > R)$:

عند استبدال الناقل الأومي R بناقل أومي آخر $(R' > R)$، يزداد ثابت الشحن $\tau = R'C$ في المرحلة الأولى (RC) وبالتالي يزداد زمن اتمام الشحن، وتصبح عملية الشحن أبطأ كما يحافظ التوتر u_{AM} على قيمته الأعظمية كون أن توتر المولد لم يتغير $(u_{AM\,\max} = E)$ فيمر المنحنى بالنقطتين J و L.

أما في المرحلة الثانية (RL) تنخفض قيمة ثابت الزمن $\tau = \dfrac{L}{R'+r}$ ويتم بلوغ النظام الدائم في زمن أقل كما تنخفض قيمة $u_b(\infty) = \dfrac{rE}{R'+r}$ ، وبالتالي يمر المنحنى في هذه المرحلة بالنقطتين M و P.

التمرين (24) :

نركب الدارة المبينة في (الشكل 1) والمتكونة من مكثفة سعتها C مشحونة كليا تحت توتر كهربائي ثابت $E = 10V$ ، ناقل أومي مقاومته R ، ثم تغلق القاطعة عند اللحظة $t = 0$.



- بين أن المعادلة التفاضلية التي تحققها طاقة المكثفة $E_C(t)$ تكتب على الشكل:

$$\frac{dE_C(t)}{dt} + \frac{2}{\tau}E_C(t) = 0 .$$

الحل المفصل:

- تبيين أن المعادلة التفاضلية التي تحققها طاقة المكثفة $E_C(t)$ تكتب على الشكل $\dfrac{dE_C(t)}{dt} + \dfrac{2}{\tau}E_C(t) = 0$:

حسب قانون جمع التوترات:

$$u_R(t) + u_C(t) = 0$$

$$R.i(t) + u_C(t) = 0 \Rightarrow R.\frac{dq(t)}{dt} + u_C(t) = 0 \Rightarrow R.\frac{d(C.u_C(t))}{dt} + u_C(t) = 0$$

$$RC\frac{du_C(t)}{dt} + u_C(t) = 0 \Rightarrow \frac{du_C(t)}{dt} + \frac{1}{RC}u_C(t) = 0 \Rightarrow \frac{du_C(t)}{dt} + \frac{1}{\tau}u_C(t) = 0$$

نضرب الطرفين في $u_C(t)$، نجد:

$$u_C(t).\frac{du_C(t)}{dt} + \frac{1}{\tau}u_C^2(t) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (1)$$

من جهة أخرى لدينا $E_C(t) = \dfrac{1}{2}C.u_C^2(t)$ ، ومنه:

- $u_C^2 = \dfrac{2E_C(t)}{C}$ ……………………………………………(2)

▪ $\frac{dE_C(t)}{dt} = \frac{1}{2}C.\frac{d}{dt}\left(\frac{du_C^2(t)}{dt}\right) \Rightarrow \frac{dE_C(t)}{dt} = \frac{1}{2}C.\left(2\frac{du_C(t)}{dt}.u_C(t)\right) \Rightarrow \frac{dE_C(t)}{dt} = Cu_C(t).\frac{du_C(t)}{dt}$

$u_C(t).\frac{du_C(t)}{dt} = \frac{1}{C}.\frac{dE_C(t)}{dt}$ ....(3)

بتعويض (2) و(3) في (1) نجد:

$\frac{1}{C}.\frac{dE_C(t)}{dt} + \frac{1}{\tau}\frac{2E_C(t)}{C} = 0 \Rightarrow \frac{dE_C(t)}{dt} + \frac{2}{\tau}E_C(t) = 0$

التمرين (25) :

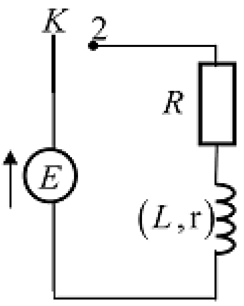
نحقق الدارة الكهربائية الممثلة في (الشكل1) باستعمال العناصر الكهربائية التالية:

– مولد مثالي للتوتر الكهربائي قوته المحركة E.

– ناقل أومي مقاومته R.

– وشيعة ذاتيها L ومقاومتها r.

– قاطعة K.



الشكل1.

غلق القاطعة عند اللحظة $t=0$،

● بين أن المعادلة التفاضلية التي يحققها $u_b(t)$ التوتر بين طرفي الوشيعة تعطى بالعلاقة:

$$\frac{du_b(t)}{dt} + \frac{1}{\tau}u_b = \frac{rE}{L}$$

حيث τ ثابت الزمن يطلب تعيين عبارته.

الحل المفصل:

● تبيين أن المعادلة التفاضلية التي يحققها $u_b(t)$ طى بالعلاقة $\frac{du_b(t)}{dt} + \frac{1}{\tau}u_b = \frac{rE}{L}$:

$u_b(t) = L.\frac{di(t)}{dt} + r.i(t)$ .... (1)

من جهة أخرى وحسب قانون جمع التوترات:

$u_b(t) + u_R(t) = E \Rightarrow u_b(t) + R.i(t) = E$

ومنه:

▪ $i(t) = \frac{E - u_b(t)}{R}$ .... (2)

▪ $\frac{di(t)}{dt} = \frac{1}{R}\left(0 - \frac{du_b(t)}{dt}\right)$

$\frac{di(t)}{dt} = -\frac{1}{R}\frac{du_b(t)}{dt}$ .... (3)

بتعويض (2) و(3) في (1)، نجد:

$$u_b(t)=L.\left(-\frac{1}{R}\frac{du_b(t)}{dt}\right)+r.\frac{E-u_b(t)}{R}$$

$$u_b(t)=-\frac{L}{R}\frac{du_b(t)}{dt}+\frac{rE}{R}-\frac{r}{R}u_b(t)$$

نضرب الطرفين في R:

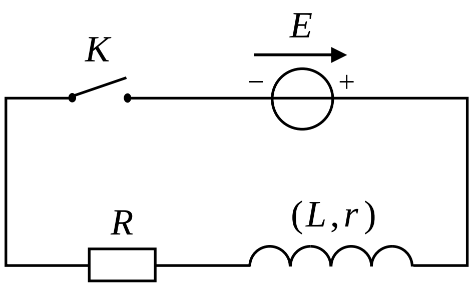
$$Ru_b(t)=-L\frac{du_b(t)}{dt}+rE-r\,u_b(t)$$

$$L\frac{du_b(t)}{dt}+(R+r)u_b(t)=rE \;\Rightarrow\; \frac{du_b(t)}{dt}+\frac{R+r}{L}u_b(t)=\frac{rE}{L}$$

التمرين (26) :

الدارة الكهربائية المبينة في (الشكل1) تتكون من العناصر التالية موصولة على التسلسل:

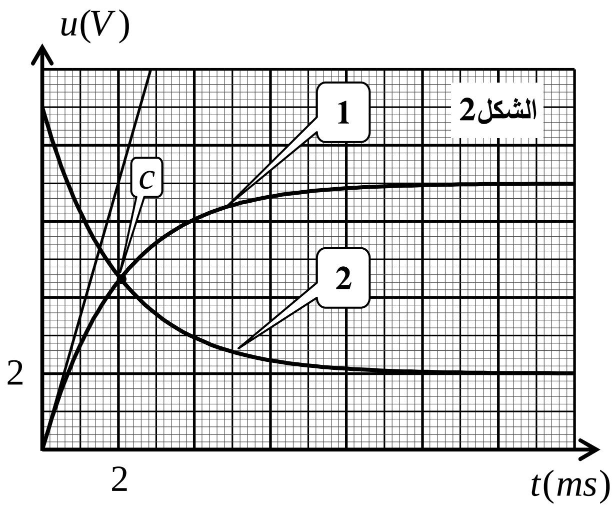
- مولد كهربائي للتوتر قوته المحركة الكهربائية $E=9\,V$.
- ناقل أومي مقاومته $R=35\Omega$.
- وشيعة ذاتيتها $L=0{,}09\,H$ ومقاومتها الداخلية $r=10\ \Omega$.



الشكل1

في اللحظة $t=0$ نغلق القاطعة K، بواسطة الـ $ExAO$ وبرمجية خاصة تمكنا من الحصول على المنحنيين (1)،(2) المبينين في (الشكل2)، الممثلين للتوتر $u_R(t)$ بين طرفي الناقل الأومي والتوتر $u_b(t)$ بين طرفي الوشيعة من دون ترتيب.

المنحنيان (1)،(2) يتقاطعان في النقطة c.



1− أثبت أن ثابت الزمن يعبر عنه بالعلاقة:

$$\tau=\frac{t_c}{\ln\left(\dfrac{2R}{R-r}\right)}$$

حيث t_c هي اللحظة الموافقة لنقطة التقاطع c. ثم احسب قيمته.

يعطى:

$$u_b(t)=\frac{E}{R+r}\left(r+Re^{-\frac{t}{\tau}}\right),\quad u_R(t)=\frac{ER}{R+r}(1-e^{-\frac{t}{\tau}})$$

2− تأكد من النتيجة المتحصل عليها حسابيا.

الحل المفصل:

1- أثبت أن ثابت الزمن يعبر عنه بالعلاقة : $\tau = \dfrac{t_c}{\ln\left(\dfrac{2R}{R-r}\right)}$

لدينا:

- $u_b(t) = \dfrac{E}{R+r}\left(r + Re^{-\frac{t}{\tau}}\right)$
- $u_R(t) = \dfrac{ER}{R+r}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$

عند نقطة التقاطع في اللحظة t_C يكون:

$$u_b(t_C) = u_R(t_C)$$

$$\frac{E}{R+r}\left(r + Re^{-\frac{t_C}{\tau}}\right) = \frac{ER}{R+r}(1 - e^{-\frac{t_C}{\tau}}) \Rightarrow \frac{\cancel{E}}{\cancel{R+r}}\left(r + Re^{-\frac{t_C}{\tau}}\right) = \frac{\cancel{E}R}{\cancel{R+r}}(1 - e^{-\frac{t_C}{\tau}})$$

$$r + Re^{-\frac{t_C}{\tau}} = R(1 - e^{-\frac{t_C}{\tau}}) \Rightarrow r + Re^{-\frac{t_C}{\tau}} = R - Re^{-\frac{t_C}{\tau}}$$

$$Re^{-\frac{t_C}{\tau}} + Re^{-\frac{t_C}{\tau}} = R - r \Rightarrow 2Re^{-\frac{t_C}{\tau}} = R - r \Rightarrow e^{-\frac{t_C}{\tau}} = \frac{R-r}{2R} \Rightarrow -\frac{t_C}{\tau} = \ln\left(\frac{R-r}{2R}\right)$$

$$\frac{t_C}{\tau} = -\ln\left(\frac{R-r}{2R}\right) \Rightarrow \tau = \frac{t_C}{\ln\left(\dfrac{2R}{R-r}\right)}$$

حساب قيمة τ :

من البيان $t_C = 2ms$، بالتعويض في عبارة τ السابقة نجد:

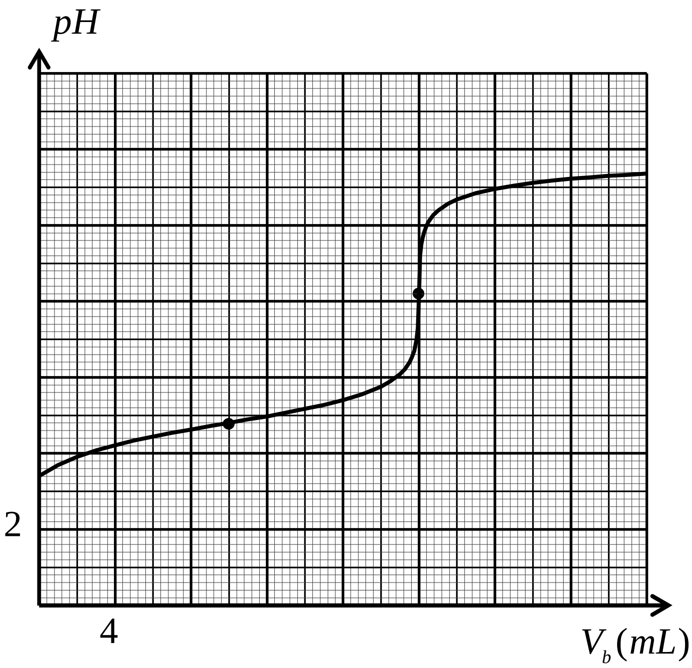
$$\tau = \frac{2\times10^{-3}}{\ln\left(\dfrac{2\times35}{35-10}\right)} \approx 2\times10^{-3}\,s$$

2- التأكد من النتيجة المتحصل عليها حسابيا:

$$\tau = \frac{L}{R+r} \Rightarrow \tau = \frac{0,09}{35+10} = 2\times10^{-3}\,s$$

وهي نفس النتيجة السابقة.

التمرين (27) :



بالتعريف الخل ذو الدرجة n يعني أن $100g$ منه تحتوي على $m(g)$ من الحمض CH_3COOH النقي. نريد التحقق من درجة الخل التجاري مكتوب على بطاقته قارورته $6,3°$.انطلاقا من هذا الخل نحضر محلولا (S_a) بتركيز c_a بتمديد عينة منه 10 مرات فنحصل على محلول تركيزه المولي c_a، ثم نعاير عند الدرجة $25°C$ حجما $V_a = 20\ mL$ من المحلول (S_a) الممدد بواسطة محلول هيدروكسيد الصوديوم $(Na^+_{(aq)} + HO^-_{(aq)})$ تركيزه المولي $c_b = 0,1056\ mol/L$ فنحصل على المنحنى: $pH = f(V_b)$ حيث V_b هو حجم محلول هيدروكسيد الصوديوم المضاف.

معادلة التفاعل المنمذج للمعايرة هي كما يلي:

$$CH_3COOH_{(aq)} + HO^-_{(aq)} = CH_3COO^- + H_2O_{(l)}$$

1− اعتمادا على البيان:

أ− بين أن الحمض المعايَر ضعيف بطريقتين مختلفتين.

ب− جِدْ قيمة التركيز المولي للحمض c في المحلول (S) والتركيز المولي c_0 للخل المدروس.

جـ− استنتج m_a كتلة الحمض النقي المنحلة في المحلول (S_0).

2− أحسب m_0 كتلة المحلول (S_0) المدروس.

3− جِد قيمة درجة الخل التجاري، وتأكد من أن الخل المدروس مغشوش أم لا.

يعطى: $M(CH_3COOH) = 60\ g/mol$

الحل المفصل:

1− أ− بين أن الحمض المستعمل ضعيف:

الطريقة الأولى:

عند نقطة التكافؤ $pH = 8,6 > 7$ ، هذا يعني أن المزيج التفاعلي عند التكافؤ أساسي، وبالتالي الحمضي المعايَر ضعيف.

الطريقة الأولى:

توجد نقطتي انعطاف، ومنه الحمض المعايَر ضعيف.

ب− إيجاد قيمة التركيز المولي للحمض c في المحلول (S):

عند التكافؤ يكون المزيج الابتدائي في شروط ستوكيومترية، ومنه:

$$c_aV_a = c_bV_{bE} \Rightarrow c_a = \frac{c_bV_{bE}}{V_a}$$

من نقطة التكافؤ في البيان لدينا:

$$V_{bE} = 5 \times 4 = 20\,mL$$

ومنه:

$$c_a = \frac{0,1056 \times 20 \times 10^{-3}}{20 \times 10^{-3}} = 0,1065\,mol/L$$

● التركيز المولي c_0 للخل المدروس:

$$c_0 = 10 \times 0,1065 = 1,065\,mol/L$$

جـ- استنتاج m_a كتلة الحمض النقي المنحلة في المحلول (S_0):

$$c_0 = \frac{n_a}{V} \Rightarrow c_0 = \frac{\frac{m_a}{M}}{V} \Rightarrow c_0 = \frac{m_a}{M.V} \Rightarrow m_a = M.c_0.V$$

$$m_a = 60 \times 1,065 \times 1 = 63,9\,g$$

2- أحسب كتلة المحلول (S_0) المدروس:

$$\rho = \frac{m_0}{V} \Rightarrow m_0 = \rho.V \Rightarrow m_0 = 1020 \times 1 = 1020\,g$$

3- إيجاد قيمة درجة الخل التجاري، والتأكد من أن الخل المدروس مغشوش أم لا:

بما أن درجة الخل هي كتلة حمض الإيثانويك المنحلة في $100g$ من الخل التجاري أي نسبة حمض الإيثانويك في الخل التجاري، يكون:

$$P = \frac{m_a}{m_0}.100 \Rightarrow P = \frac{63,9}{1020} \times 100 = 6,3°$$

وهي نفسها المسجلة على بطاقة قارورة حمض الخل المدروس، ويمكنا الحصول على النتيجة باستعمال القاعدة الثلاثية.

التمرين (28) :

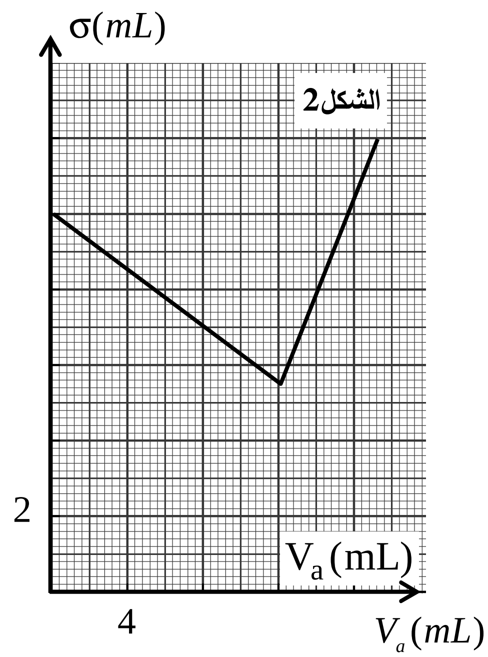
على ملصقة قارورة منظف (S_0) تجاري تركيزه المولي c_0 كتب مايلي:

- محلول هيدروكسيد الصوديوم (S_0) كثافته $d = 1,20$.
- درجة نقاوته $P = 20\%$.

للتحقق من درجة نقاوة هذا المنظف، أخذنا عينة منه، ثم مددناها 500 مرة فتحصلنا على محلول (S) تركيزه المولي c_b، أخذنا من المحلول (S) حجما $V_b = 10\ mL$ وسكبناه في بيشر ثم عايرناه عن طريق قياس الناقلية بمحلول حمض كلور الهيدروجين تركيزه المولي $c_a = 10^{-2}mol/L$. بيان (الشكل2) يمثل تغيرات الناقلية النوعية σ للمزيج التفاعلي بدلالة V_A حجم حمض كلور الهيدروجين المضاف.

معادلة التفاعل المنمذج للمعايرة تكون كما يلي:

$$HO^-_{(aq)} + H_3O^+_{(aq)} = 2H_2O_{(l)}$$



1- أعط تفسيرا لتغير الناقلية النوعية σ للمزيج خلال مراحل المعاير :

(قبل التكافؤ، عند التكافؤ، بعد التكافؤ)

2- عين حجم الحمض المضاف عند التكافؤ V_{aE}.

3- أحسب التركيز المولي c_b للمحلول (S) المعايَر، ثم استنتج التركيز المولي c_0 للمحلول (S_0).

4- أحسب النسبة المئوية الكتلية $P\%$ لمحلول الصودا (S_0) وهل توافق القيمة المسجلة على قارورة المنظف التجاري.

تعطى : $M_{NaOH} = 40\ g/mol$ ، $M_{Mg} = 24,3\ g/mol$.

الحل المفصل:

1- إعطاء تفسيرا لتغير الناقلية النوعية σ للمزيج أثناء المعايرة:

قبل التكافؤ:

تتناقص تدريجيا شوارد الهيدروكسيد HO^- الموجودة في البيشر نتيجة تفاعلها مع شوارد H_3O^+ المضافة من السحاحة، وهذا ما يؤدي تناقص الناقلية النوعية.

عند التكافؤ:

تبلغ الناقلية النوعية σ أدنى قيمة لها ويعود ذلك إلى تفاعل كل شوارد الهيدروكسيد HO^- الموجودة في البيشر مع كل شوارد H_3O^+ المضافة من السحاحة.

بعد التكافؤ:

بسبب عدم وجود شوارد HO^- في البيشر والتي تفاعلت كليا عند التكافؤ، تتجمع شوارد H_3O^+ المضافة من السحاحة وتزداد كمية مادتها، وهذا ما يؤدي إلى زيادة الناقلية النوعية في هذه المرحلة.

2- تعيين حجم الحمض المضاف عند التكافؤ V_{aE}:

عند التكافؤ تبلغ الناقلية النوعية أدنى قيمة لها، ومن البيان يكون:

$$V_{aE} = 3\times 4 = 12\,mL$$

3- حساب التركيز المولي c_b للمحلول (S) المعايَر:

عند التكافؤ يكون المزيج الابتدائي في شروط ستوكيومترية، ومنه:

$$c_bV_B = c_aV_{aE} \Rightarrow c_b = \frac{c_aV_{aE}}{V_B} \Rightarrow c_b = \frac{40\times 12\times 10^{-3}}{10\times 10^{-3}} = 1,2\times 10^{-2}\ mol/L$$

● استنتاج قيمة التركيز المولي c_0 للمحلول (S_0):

$$c_0 = 500\times 1,12\times 10^{-2} = 6\,mol/L$$

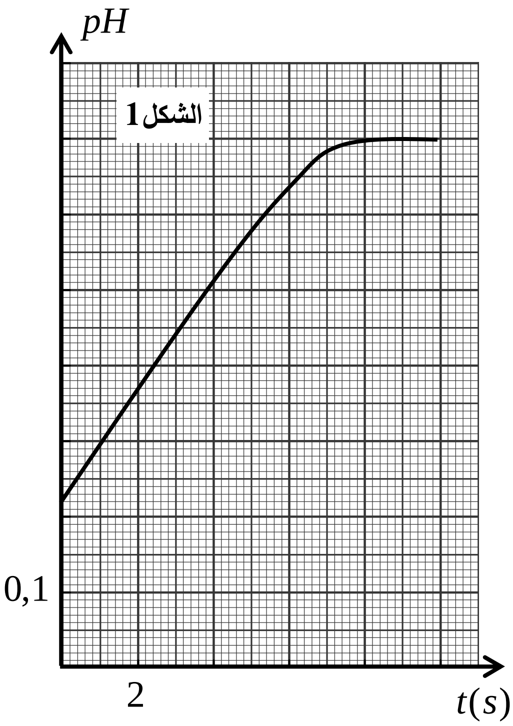
4– حساب النسبة المئوية الكتلية $P\%$ لمحلول هيدروكسيد الصوديوم (S_0):

$$P=\frac{M.c_0}{10.d} \Rightarrow P=\frac{40\times 6}{10\times 1,2}=20\%$$

● نعم النتيجة المتحصل عليها توافق القيمة المسجلة على قارورة المنظف التجاري.

التمرين (29) :

حمض الهيدروكلوريك $(H_3O^+{}_{(aq)} + Cl^-{}_{(aq)})$ أو حمض كلور الهيدروجين هو حمض معدني قوي عبارة عن محلول مائي لغاز كلور الهيدروجين ، يستعمل بكثرة في المجال الصناعي كما أنه المكون الرئيسي للعصارة الهضمية ، ينبغي التعامل معه بحرص شديد لأنه سائل متلف للأنسجة و بامكانه أن يؤذي أعضاء التنفس و العين و الجلد و قد تم تصنيفه من قبل وكالة حماية البيئة الأمريكية كمادة سامة .



يهدف التمرين إلى المتابعة الزمنية لتفاعل حمض كلور الهيدروجين مع معدن المغنزيوم Mg :

نضع في بيشر حجما $V=50\ mL$ من محلول حمض كلور الهيدروجين تركيزه المولي c_0، نغمر فيه مسبار الـ pH متر ثم نفرغ عليه كتلة $m=0,243\ g$ من مسحوق المغنزيوم Mg، نلاحظ انطلاق فقاعات غازية واختفاء تدريجي للمسحوق.

معادلة التفاعل المنمذج للتحول الكيميائي الحادث هي:

$$Mg_{\ (s)}+2H_3O^+{}_{(aq)}=Mg^{2+}{}_{(aq)}+2H_2O_{(l)}+H_{2(g)}$$

أثناء المتابعة الزمنية لتركيز الحمض المتبقي تمكنا من رسم المنحى $pH=f(t)$. (الشكل1).

1– استنتج من البيان قيمة c_0 التركيز المولي لمحلول حمض كلور الهيدروجين.

2– أنشئ جدولا لتقدم التفاعل الحادث واحسب قيمة التقدم الأعظمي x_{max} ثم استنتج المتفاعل المحد.

2– عبر عن التقدم النهائي x_f بدلالة c ، V ، pH .

4– أحسب نسبة التقدم النهائي τ_f ، ماذا تستنتج؟

5– أوجد قيمة زمن نصف التفاعل $t_{1/2}$.

يعطى: $M(Mg)=24,3\, g/mol$

الحل المفصل:

1– استنتاج قيمة c_0 التركيزه المولي لمحلول حمض كلور الهيدروجين:

حمض كلور الهيدروجين قوي، لذا يكون:

$$\tau_f = \frac{\left[H_3O^+\right]_0}{c_0} = 1 \Rightarrow c_0 = \left[H_3O^+\right]_0$$

من البيان:

$$pH_0 = 2,2 \times 0,1 = 0,22$$

ومنه:

$$c_0 = 10^{-0,22} = 0,6\, mol / L$$

2– إنشاء جدول تقدم التفاعل الحادث:

المعادلة		$Mg_{(s)}$	$+ \; 2H_3O^+_{(aq)}$	$= \; Mg^{2+}_{(aq)}$	$+ \; H_2$	$+ \; 2H_2O$
الحالة	التقدم	كمية المادة بـ (mol)				
ابتدائية	$x = 0$	$n_0(Mg)$	$n_0(H_3O^+)$	0	0	بوفرة
انتقالية	x	$n_0(Mg) - x$	$n_0(H_3O^+) - 2x$	x	x	
نهائية	x_{max}	$n_0(Mg) - x_{max}$	$n_0(H_3O^+) - 2x_{max}$	x_{max}	x_{max}	

- $n_0(Mg) = \dfrac{m}{M} = \dfrac{0,243}{24,3} = 10^{-2}\, mol$
- $n_0(H_3O^+) = c_0 V_0 = 0,6 \times 50 \times 10^{-3} = 3 \times 10^{-2}\, mol$

● حساب قيمة التقدم الأعظمي x_{max} واستنتج المتفاعل المحد:

– بفرض أن Mg متفاعل محد:

$$n_0(Mg) - x_{max} = 0 \;\Rightarrow\; x_{max} = n_0(Mg) = 10^{-2}\, mol$$

– بفرض أن H_3O^+ متفاعل محد:

$$n_0(H_3O^+) - 2x_{max} = 0 \;\Rightarrow\; x_{max} = \frac{n_0(H_3O^+)}{2} = \frac{3 \times 10^{-2}}{2} = 1,5 \times 10^{-2}\, mol$$

إذن: $x_{max} = 10^{-2}\, mol$ ، والمتفاعل المحد هو: Mg .

2- عبارة التقدم النهائي x_f بدلالة c ، V ، pH :

من جدول التقدم:

$$\left[H_3O^+\right]_f = \frac{n_0(H_3O^+) - 2x_f}{V} \Rightarrow \left[H_3O^+\right]_f = \frac{c_0V - 2x_f}{V} \Rightarrow \left[H_3O^+\right]_f.V = c_0V - 2x_f$$

$$2x_f = c_0V - \left[H_3O^+\right]_f.V \Rightarrow 2x_f = \left(c_0 - \left[H_3O^+\right]_f\right).V \Rightarrow x_f = \frac{\left(c_0 - 10^{-pH_f}\right).V}{2}$$

4- حساب نسبة التقدم النهائي τ_f :

$$\tau_f = \frac{x_f}{x_{\max}}$$

من البيان $pH_f = 0,7$ ، ووجدنا سابقا $x_{\max} = 10^{-2}\,mol/L$ ، بالتعويض في عبارة x_f السابقة، نجد:

$$x_f = \frac{\left(0,6 - 10^{-0,7}\right)\times 50\times 10^{-3}}{2} = 10^{-2}\,mol$$

ومنه:

$$\tau_f = \frac{10^{-2}}{10^{-2}} = 1$$

● الإستنتاج:

$\tau_f = 1$ ، نستنتج أن التفاعل الحادث بين المغنزيوم وجمض كلور الهيدروجين تام.

5- إيجاد قيمة زمن نصف التفاعل $t_{1/2}$:

نحسب قيمة $pH_{1/2}$ ، وحسب تعريف زمن نصف التفاعل يكون:

$$x_{1/2} = \frac{x_{\max}}{2} = \frac{10^{-2}}{2} = 5\times 10^{-3}\,mol$$

اعتمادا على جدول التقدم:

$$\left[H_3O^+\right]_{1/2} = \frac{n_0(H_3O) - 2x_{1/2}}{V} \Rightarrow \left[H_3O^+\right]_{1/2} = \frac{3\times 10^{-2} - (2\times 5\times 10^{-3})}{50\times 10^{-3}} = 0,4\,mol/L$$

ومنه:

$$pH_{1/2} = -\log\left[H_3O^+\right]_{1/2} \Rightarrow pH_{1/2} = -\log 0,4 = 0,4$$

يالإسقاط في البيان:

$$t_{1/2} = 1,2\times 2 = 2,4\,s$$

التمرين (30) :

تسمح المراقبة المستمرة لدرجة حموضة الحليب بالتاكد من جودته اي من صلاحية تناوله.

يستعمل حمض اللاكتيك $(C_3H_6O_3)$ كمادة مضافة في الصناعات الغذائية و في الصيدلة ضد بعض أمراض الجلد كما يستعمل في التخلص من الترسبات الكلسية التي تتشكل خلال الاستعمال المتكرر للأواني مثل آلة تقطير القهوة وهو قابل التفكك و لا يهاجم الأجزاء المعدنية للآلة ..... الحليب الطازج قليل الحموضة ، يصبح غير صالح للاستهلاك كلما كانت حمضيته كبيرة.

لأجل مراقبة جودة الحليب ، نعاير حجما $V_a = 25\ mL$ من حليب مخفف بواسطة محلول هيدروكسيد الصوديوم تركيزه المولي $c_b = 5\times10^{-2} mol.L^{-1}$ ، فكان الحجم اللازم للتكافؤ هو $V_{bE} = 12,5\ mL$.

1- اكتب معادلة تفاعل المعايرة ، باعتبار حمض اللاكتيك هو الحمض الوحيد الموجود بالحليب المعاير.

2- احسب التركيز المولي c_a لحمض اللاكتيك.

3- في الصناعات الغذائية ، يُعبر عن حمضية الحليب بدرجة "دورنيك" Doric $(°D)$ ، حيث $(1°D)$ توافق $0,1\ g$ من حمض اللاكتيك لكل $1L$ من حليب. لكي يكون الحليب صالحا للاستهلاك يجب أن لا تتجاوز حمضيته $(18°D)$ ، هل يمكن اعتبار الحليب المدروس صالحا للاستهلاك؟

يعطى: $M(C_3H_6O_3) = 90\,g/mol$.

الحل المفصل:

1- كتابة معادلة تفاعل المعايرة:

$$C_3H_6O_{3(aq)} + HO^-_{(aq)} = C_3H_5O_3^-{}_{(aq)} + H_2O_{(l)}$$

2- حساب التركيز المولي c_a لحمض اللاكتيك:

عند التكافؤ يكون المزيج الابتدائي في شروط ستوكيومترية، ومنه:

$$c_aV_a = c_bV_{bE} \Rightarrow c_a = \frac{c_bV_{bE}}{V_a} \Rightarrow c_a = \frac{5\times10^{-2}\times12,5\times10^{-3}}{25\times10^{-3}} = 2,5\times10^{-2}\,mol/L$$

3- امكانية اعتبار الحليب المدروس صالحا للاستهلاك:

نحسب كتلة حمض اللاكتيك في $1L$ من الحليب المدروس.

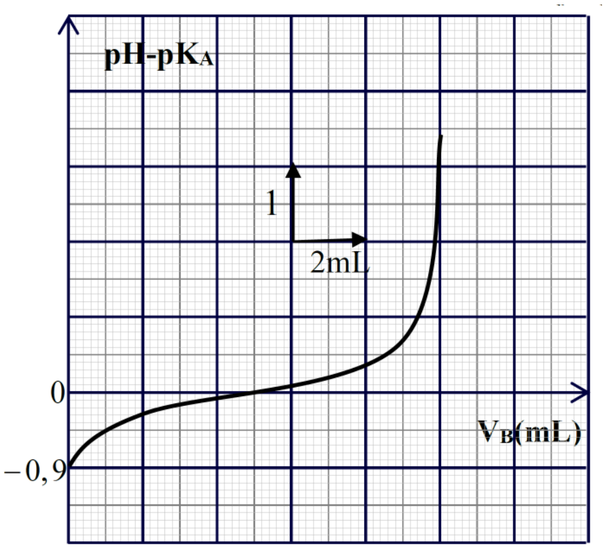
$$c_a = \frac{n_a}{V} = \frac{\frac{m}{M}}{V} = \frac{m}{M.V} \Rightarrow m = M.c_a.V \Rightarrow m = 90\times2,5\times10^{-2}\times1 = 2,25\,g$$

نعبر عن قيمة الكتلة المتحصل عليها بالدرجة دورنيك، فيكون:

$$\begin{cases} 0,1g \rightarrow 1°D \\ 2,25g \rightarrow D° \end{cases} \Rightarrow D° = \frac{2,25\times1}{0,1} = 22,5°D$$

نلاحظ أن $D > 18°D$ ، إذن الحليب غير صالح للاستعمال.

التمرين (31) :



الشكل-3-

عايرنا حجم $V = 10\,mL$ من محلول (S) لحمض الميثانويك $HCOOH$ ذي $pH = 2,9$ بمحلول هيدروكسيد الصوديوم $\left(Na^+_{(aq)} + OH^-_{(aq)}\right)$، مكنتنا القياسات التجريبية من رسم المنحنى البياني $pH - pK_a = f(V_B)$ الممثل في (الشكل3).

استنتج من البيان:

1- قيمة pK_a للثنائية $HCOOH / HCOO^-$.

2- الحجم V_{bE} حجم محلول هيدروكسيد اللازم للتكافؤ.

3- التركيز المولي c_b لمحلول هيدركسيد الصوديوم وقيمة الـ pH له، علما أنه أساس قوي.

الحل المفصل:

1- تحديد قيمة pK_a للثنائية $HCOOH / HCOO^-$:

قبل المعايرة $(V_b = 0)$ من جهة لدينا $pH = 2,9$ ، ومن جهة أخرى اعتمادا على البيان يكون:

$$pH - pKa = -0,9 \;\Rightarrow\; pH + 0,9 = pKa$$

$$pKa = pH + 0,9 \;\Rightarrow\; pKa = 2,9 + 0,9 = 3,8$$

2- حساب الحجم V_{bE} حجم محلول هيدروكسيد اللازم للتكافؤ:

عند نقطة نصف التكافؤ أين $V_b = \dfrac{V_{bE}}{2}$ و $pH = pK_a$ ، يكون:

$$pH - pK_a = 0$$

بالإسقاط في البيان نجد:

$$\frac{V_{bE}}{2} = 2,5 \times 2 = 5\,mL \;\Rightarrow\; V_{bE} = 10\,mL$$

3- التركيز المولي c_b لمحلول هيدركسيد الصوديوم وقيمة الـ pH له، علما أنه أساس قوي.

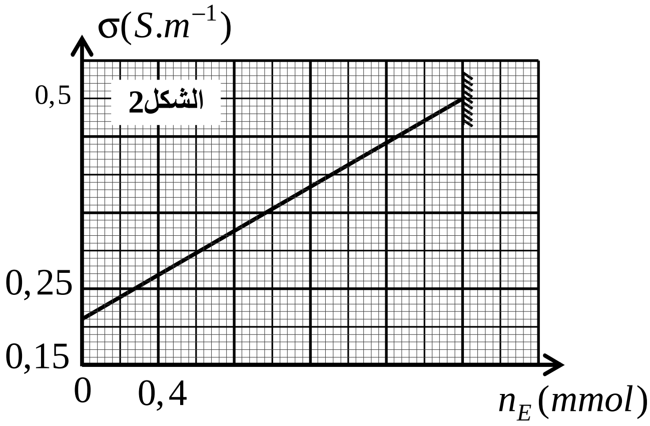
التمرين (32) :

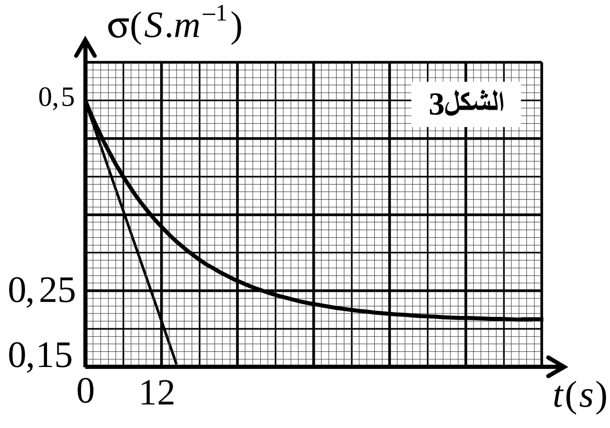
من أجل متابعة تطور التحول الكيميائي التام والبطيء بين المركب العضوي السائل $C_3H_6O_2$ (الذي نرمز له لاحقا بـ E) وهيدروكسيد الصوديوم $\left(Na^+_{(aq)} + HO^-_{(aq)}\right)$ والذي ننمذجه بالمعادلة الكيميائية التالية:

$$C_3H_6O_{2(l)} + HO^-_{(aq)} = C_2H_6O_{(aq)} + CHO^-_{2\,(aq)}$$

وضعنا في بيشر حجما $V_0 = 100\,mL$ من هيدروكسيد الصوديوم تركيزه المولي $c_0 = 2\times10^{-2}\,mol.L^{-1}$ وعند اللحظة $t = 0$ ودرجة حرارة $25°C$ أضفنا للبيشر بعض قطرات من المركب العضوي السابق والتي تكافئ كمية مادة n_{E0}.

قمنا بقياس σ الناقلية النوعية للمزيج المتفاعل من حين لآخر، وعند كل قياس استنتجنا كمية مادة المركب العضوي E حيث $(V_T = V_0)$، ثم مثلنا بيانيا $\sigma = f(n_E)$ (الشكل2) و $\sigma = g(t)$ (الشكل3).





1− ما هو شرط متابعة تطور تفاعل كيميائي عن طريق قياس الناقلية؟ بما تتعلق الناقلية النوعية لمحلول مائي؟

2− أنشئ جدولا لتقدم التفاعل.

3− اعتمادا على جدول التقدم وبياني الشكلين2 و3، جِد $x_{\max}$ قيمة التقدم الأعظمي.

4− اعتمادا على جدول تقدم التفاعل، بين أن الناقلية النوعية للمزيج عند كل لحظة زمنية t يُعبر عنها بدلالة كمية مادة المركب العضوي (E) بالعلاقة: $\sigma_{(t)} = 145 n_{E(t)} + 0,21$

5− عرف $t_{1/2}$ زمن نصف التفاعل ثم بين أن عند هذه اللحظة يكون $n_{E1/2} = \dfrac{n_{E0}}{2}$.

6− أحسب $\sigma_{1/2}$ قيمة الناقلية النوعية عند زمن نصف التفاعل $t_{1/2}$ ثم عينها من بيان (الشكل3).

7− عرف السرعة الحجمية لاختفاء (E) واحسب قيمتها الأعظمية.

8− نعيد التجربة عند درجة الحرارة $40°C$، أجب بصحيح أو خطأ على مايلي:

أ− تزداد قيمة $t_{1/2}$ زمن نصف التفاعل.

ب− تنعدم قيمة v_{vol} السرعة الحجمية للتفاعل في مدة زمنية أقل.

جـ− قيمة $\sigma_{\max}$ الناقلية النوعية الأعظمية لا تتغير.

يعطى: $\lambda_{HO^-} = 20\, ms.m^2.mol^{-1}$ ، $\lambda_{Na^+} = 5\, ms.m^2.mol^{-1}$ ، $\lambda_{CHO_2^-} = 5\, ms.m^2.mol^{-1}$

<u>الحل المفصل:</u>

1− شرط متابعة تطور تفاعل كيميائي عن طريق قياس الناقلية هو أن يحتوي الوسط التفاعلي على شوارد موجبة وسالبة.

− تتعلق الناقلية النوعية لمحلول مائي بما يلي:

- التركيز المولي للمحلول.
- طبيعة الشوارد.
- درجة الحرارة.

2- جدول التقدم:

المعادلة		$C_3H_6O_2$	$+\ HO^-$	$=\ C_2H_6O$	$+\ CHO_2^-$
الحالة	التقدم	كمية المادة بـ (mol)			
ابتدائية	$x=0$	n_{E0}	$n_0\left(HO^-\right)=c_0V_0$	0	0
انتقالية	x	$n_{E0}-x$	c_0V_0-x	x	x
نهائية	x_{max}	$n_{E0}-x_{max}$	$c_0V_0-x_{max}$	x_{max}	x_{max}

3- قيمة $x_{\max}$:

من بيان (الشكل3) $\sigma_f=0,22\ S/m$، بالإسقاط في بيان (الشكل2)، نجد: $n_{Ef}=0$.

من بيان (الشكل3) $\sigma_0=0,5\ S/m$، بالإسقاط في بيان (الشكل2)، نجد:

$$n_{E0}=5\times0,4\times10^{-3}=2\times10^{-3}\,mol/L$$

من جدول التقدم مع الأخذ بعين الاعتبار أن E متفاعل محد يكون:

$$n_{E0}-x_{\max}=0\ \Rightarrow\ x_{\max}=n_{E0}=2\times10^{-3}\,mol$$

4- إثبات $\sigma_{(t)}=145n_{E(t)}+0,21$:

$$\sigma_{(t)}=\lambda(HO^-)\left[HO^-\right]_{(t)}+\lambda(CHO_2^-)\left[CHO_2^-\right]_{(t)}+\lambda(N_a^+)\left[Na^+\right]$$

اعتمادا على جدول التقدم:

$$\sigma_{(t)}=\lambda(HO^-)\frac{c_0V_1-x_{(t)}}{V_T}+\lambda(CHO_2^-)\frac{x_{(t)}}{V_T}+\lambda(N_a^+)\frac{c_0V_0}{V_T}$$

$$\sigma_{(t)}=\lambda(HO^-)\frac{c_0\cancel{V}_1}{\cancel{V}_T}-\lambda(HO^-)\frac{x_{(t)}}{V_T}+\lambda(CHO_2^-)\frac{x_{(t)}}{V_T}+\lambda(N_a^+)\frac{c_0\cancel{V}_0}{\cancel{V}_T}$$

$$\sigma_{(t)}=\lambda(HO^-)c_0-\lambda(HO^-)\frac{x_{(t)}}{V_T}+\lambda(CHO_2^-)\frac{x_{(t)}}{V_T}+\lambda(N_a^+)c_0$$

$$\sigma_{(t)}=\frac{\lambda(CHO_2^-)-\lambda(HO^-)}{V_T}x_{(t)}+\left(\lambda(N_a^+)+\lambda(HO^-)\right)c_0$$

$$\sigma_{(t)}=\frac{5,5\times10^{-3}-20\times10^{-3}}{0,1\times10^{-3}}x_{(t)}+\left(5\times10^{-3}+20\times10^{-3}\right)\times20$$

$$\sigma_{(t)}=-145x_{(t)}+0,5$$

من جدول التقدم:

$$n_{E(t)}=n_{E0}-x_{(t)}\ \Rightarrow\ n_{E(t)}=2\times10^{-3}-x_{(t)}\Rightarrow\ x_{(t)}=2\times10^{-3}-n_{E(t)}$$

ومنه يصبح:

$$\sigma_{(t)} = -145 \times (2\times10^{-3} - n_{E(t)}) + 0,5$$
$$\sigma_{(t)} = -145 \times 2\times10^{-3} + 145 n_{E(t)} + 0,5$$
$$\sigma_{(t)} = -0,29 + 145 n_{E(t)} + 0,5 \Rightarrow \sigma_{(t)} = 145 n_{E(t)} + 0,21$$

5- تعريف $t_{1/2}$ زمن نصف التفاعل:

هو الزمن اللازم لبلوغ تقدم التفاعل نصف قيمته الأعظمية.

- إثبات أن $n_{E1/2} = \frac{n_{E0}}{2}$:

- من جدول التقدم في نهاية التفاعل $n_{E\,f} = n_{E0} - x_{\max}$، وكون أن (E) متفاعل محد يكون:

$$n_{E0} - x_{\max} = 0 \quad .... \ (1)$$

- من جدول التقدم أيضا:

$$n_{E1/2} = n_{E0} - x_{1/2}$$

حسب تعريف $t_{1/2}$ يكون $x_{1/2} = \frac{x_{\max}}{2}$ ، منه:

$$n_{E1/2} = n_{E0} - \frac{x_{\max}}{2}$$

بضرب الطرفين في 2 نجد:

$$2n_{E1/2} = 2n_{E0} - x_{\max}$$
$$2n_{E1/2} = n_{E0} + \underbrace{n_{E0} - x_{\max}}_{0} \quad .... \ (2)$$

من (1)، (2) يكون:

$$2n_{E1/2} = n_{E0} \Rightarrow n_{E1/2} = \frac{n_{E0}}{2}$$

6- قيمة $\sigma_{1/2}$:

اعتمادا على ما سبق:

$$\sigma_{1/2} = 145\, n_{E1/2} + 0,21 \Rightarrow \sigma_{1/2} = 145 \times \frac{n_{E0}}{2} + 0,21$$
$$\sigma_{1/2} = 145 \times \frac{2\times10^{-3}}{2} + 0,21 = 0,335 mol$$

بالإسقاط في بيان (الشكل3) مع أخذ سلم الرسم بعين الاعتبار نجد $t_{1/2} = 9,6\,s$.

7- تعريف السرعة لاختفاء (E) الحجمية للتفاعل:

هي سرعة اختفاء (E) في وحدة الحجم.

السرعة الحجمية الأعظمية لاختفاء (E) عند اللحظة $t=0$:

$$v_{vol}(E) = -\frac{1}{V_{vol}}\frac{dn(E)}{dt}$$

مما سبق: $\sigma_{(t)} = 145 n_{E(t)} + 0,21$، ومنه:

$$\sigma_{(t)} - 0,21 = 145 n_{E(t)} \Rightarrow n_{E(t)} = \frac{\sigma_{(t)} - 0,21}{145}$$

بالتعويض في عبارة السرعة الحجمية لاختفاء (E):

$$v_{vol}(E) = -\frac{1}{V_{vol}}\frac{d}{dt}\left(\frac{\sigma_{(t)} - 0,21}{145}\right) \Rightarrow v_{vol}(E) = -\frac{1}{145 V_{vol}}\frac{d\sigma_{(t)}}{dt}$$

السرعة الحجمية لاختفاء (E) تتناقص خلال التحول الكيميائي، وتكون أعظمية عند اللحظة $t=0$، اعتمادا على بيان (الشكل3) عند اللحظة $t=0$ يكون:

$$v_{vol}(E) = -\frac{1}{145 \times 0,1}\frac{(0-0,5)}{(1,2-0)\times 12} = 2,39 \times 10^{-4}\ mol/L.\min$$

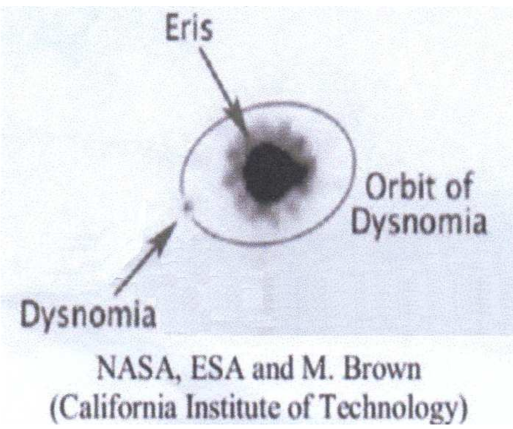
8- الإجابة بصحيح أم خطأ بعد إعادة التجربة عند درجة الحرارة $40°C$:

أ. تزداد قيمة زمن نصف التفاعل ⇐ **خطأ.**

ب. تنعدم قيمة السرعة الحجمية للتفاعل في مدة زمنية أقل ⇐ **صحيح.**

ج. قيمة الناقلية النوعية النهائية لا تتغير ⇐ **خطأ.**

التمرين (33) :



اكتشف كوكب بلوتو $(Pluton)$ سنة 1930م واعتُبر التاسع في المجموعة الشمسية، وفي سنة 2005م اكتشف جسم جديد منجذب حول الشمس سُمي $(Eris)$ على اسم إلهة الخلاف عند الإغريق. إضافة $(Eris)$ إلى كواكب أخرى مشابهة كان بداية خلاف وجدل حاد بين الفلكيين حول تعريف الكوكب، وخلال تجمع الإتحاد الفلكي العالمي (UAI) في براغ تقرر إنزال $(Pluton)$ من رتبة كوكب إلى صف كويكب $(planète\ naine)$ رفقة $(Eris)$ و $(Cérès)$.

يهدف التمرين إلى تحديد سبب إنزال *(Pluton)* من رتبة كوكب إلى صف كويكب.

1. يدور إيريس في مدار اهليليجي حول الشمس بدور T_E قدره 557 سنة أرضية.

المعطيات:

- الدور المداري للأرض: $T_T = 1,00\,ans$، الدور المداري لبلوتو: $T_P = 248\,ans$.

1.1. اكتب نص القانون الثالث لكبلر، المتعلق بالدور المداري لكوكب حول الشمس، في حالة مدار إهليليجي.

2.1. هل يقع مدار إيريس أبعد أو أدنى من مدار بلوتو؟ برر إجابتك دون حساب.

2. فيما بعد، اكتشف الفلكيون أن إيريس يملك قمرا طبيعيا ديسنوميا $Dysnomia$ (ابنة إيريس). ثمانية أيام مراقبة من الأرض سمحت بإنشاء مدار ديسنوميا والحصول على صورة الشكل1.

معطيات:

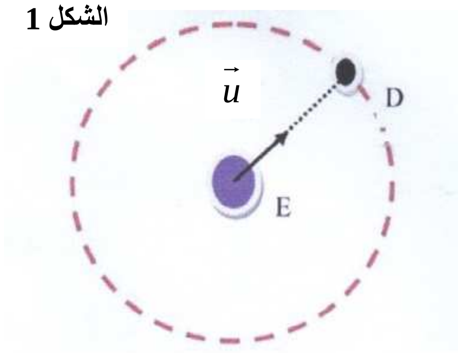
- كتلة بلوتو: $M_P = 1,31\times10^{22}\,kg$.
- نصف قطر المدار الدائري لديسنوميا: $r_D = 3,60\times10^{7}\,m$.
- الدور المداري لديسنوميا: $T_D = 15,0\,jours = 1,30\times10^{6}\,s$.
- ثابت الجذب العام: $G = 6,67\times10^{-11}\,SI$.

نفرض أن حركة ديسنوميا حول إيريس دائرية منتظمة ويؤخذ: $\pi^2 = 10$.

1.2. حدد المرجع الذي يسمح بدراسة حركة ديسنوميا حول إيريس، سنعتبر فيما يلي هذا المرجع غاليليا.

2.2. اكتب عبارة شعاع التسارع $\vec{a}$ لمركز عطالة ديسنوميا بدلالة G، M_E و r_D المعطيات وشعاع الوحدة $\vec{U}_{ED}$ الممثل في الشكل1.

الشكل 1



3.2. حدد حامل واتجاه شعاع التسارع.

4.2. بين أن عبارة الدور المداري لديسنوميا هي: $T_D = 2\pi\sqrt{\dfrac{r_D^3}{GM_E}}$. هل قانون كبلر محقق؟علل.

5.2. استنتج من عبارة T_D عبارة M_E كتلة إيريس، ثم احسب قيمتها.

6.2. احسب النسبة بين كتلتي إيريس و بلوتو $\dfrac{M_E}{M_P}$. اشرح لماذا أدى اكتشاف إيريس إلى إعادة النظر في تصنيف بلوتو.

<u>1.1. نص القانون الثالث لكبلر:</u>

مربع دور حركة كوكب يتناسب طرديا مع مكعب البعد المتوسط بين مركزي الكوكب والشمس.

<u>2.1. مدار إيريس، يقع أبعد أو أدنى من مدار بلوتو:</u>

حسب قانون كبلر الثالث:

$$\frac{T_E^{\,2}}{r_E^3} = \frac{T_P^2}{r_P^3} \Rightarrow \frac{T_E^{\,2}}{T_P^2} = \frac{r_E^3}{r_P^3}$$

و كون أن: $T_E > T_P$ يكون:

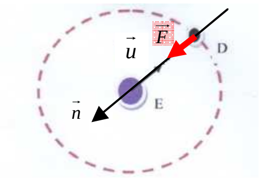
$$\frac{r_E^3}{r_P^3} > 1 \Rightarrow r_E > r_P$$

و منه فإن مدار إيريس أبعد من مدار بلوتو.

1.2. المرجع الذي يسمح بدراسة حركة ديسنوميا حول إيريس:

هو مرجع ينطبق على مركز إيريس (مركزي إيريسي)

2.2. عبارة شعاع التسارع $\vec{a}$ لمركز عطالة ديسنوميا بدلالة المعطيات و شعاع الوحدة $\overrightarrow{U_{ED}}$:



بتطبيق القانون الثاني لنيوتن على الجملة قمر ديستنوميا:

$$\sum \overrightarrow{F_{ext}} = m.\vec{a}_G$$

$$\vec{F}_{E/D} = m_D.\vec{a}$$

$$-\frac{GM_E.m_D}{r_D^2}\vec{u} = m_D.\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = -\frac{GM_E}{r_D^2}\vec{u}$$

3.2. تحديد حامل واتجاه شعاع التسارع:

– الحامل هو حامل الشعاع $\overrightarrow{u_{DE}}$ (الناظر على المماس للمدار).

– الجهة: نحو مركز المدار.

4.2. إثبات $T_D = 2\pi\sqrt{\frac{r_D^3}{GM_E}}$:

لدينا: $T_D = \frac{2\pi.r_D}{v}$، و كون أن الحركة دائرية منتظمة يكون: $a = a_n = \frac{v^2}{r_D}$ و منه:

$$\frac{v^2}{r_D} = \frac{G.M_E}{r_D^2} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{G \cdot M_E}{r_D}}$$

و بالتعويض في عبارة الدور T_D نجد في النهاية:

$$T_D = \frac{2\pi.r_D}{\sqrt{\frac{G \cdot M_E}{r_D}}} \Rightarrow T_D{}^2 = \frac{4\pi^2.r_D^2}{\frac{G \cdot M_E}{r_D}} \Rightarrow T_D{}^2 = \frac{4\pi^2.r_D^3}{G \cdot M_E}$$

$$T_D = \sqrt{\frac{4\pi^2.r_D^3}{G \cdot M_E}} \Rightarrow T_D = 2\pi\sqrt{\frac{r_D^3}{G.M_E}}$$

▪ تحقق قانون كبلر محقق أم لا:

مما سبق:

$$T_D^2 = \frac{4\pi^2 r_D^3}{G.M_E} \Rightarrow \frac{T_D^2}{r_D^3} = \frac{4\pi^2}{G.M_E}$$

G ، M_E ، يعني النسبة $\frac{T_D^2}{r_D^3}$ ثابتة ومنه قانون كبلر الثالث محقق.

5.2. عبارة M_E كتلة إيريس و قيمتها:

مما سبق:

$$T_D^2=\frac{4\pi^2 r_D^3}{G.M_E}\Rightarrow M_E=\frac{4\pi^2 r_D^3}{G.T_D^2}$$

و منه:

$$M_E=\frac{4\pi^2.(3,6\times10^7)^3}{6,67\times10^{-11}(1,5\times24\times3600)^2}=1,67\times10^{22}kg$$

6.2. حساب النسبة بين كتلتي إيريس وبلوتو $\frac{M_E}{M_P}$:

$$\frac{M_E}{M_P}=\frac{1,67\times10^{22}}{1,31\times10^{22}}=1,27$$

شرح لماذا أدى اكتشاف إيريس إلى إعادة النظر في تصنيف بلوتو:

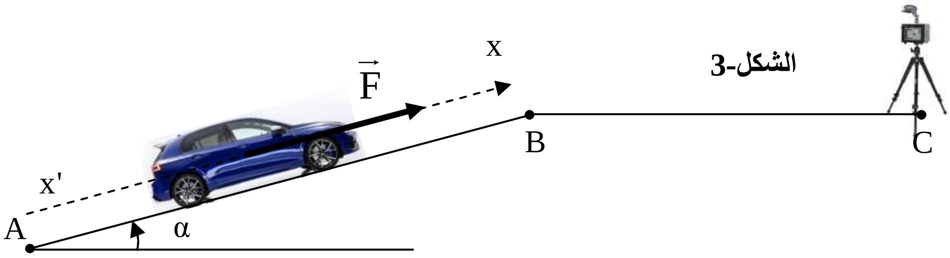
من قيمة النسبة $\frac{M_E}{M_P}=1,27$ ، كتلة إيريس أكبر بقليل من كتلة بلوتو، فإذا كان إريس لم يصنف كوكبا فإن بلوتو لا يمكن تصنيفه كوكبا.

التمرين (34) :

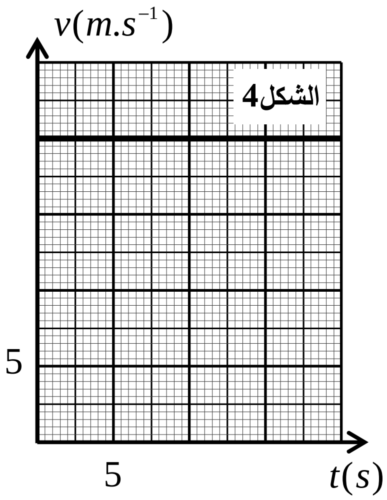
تسببت الطرقات عبر ولايات الوطن في حصد عدد كبير من الأرواح كان السرعة المفرطة العامل الأساسي فيها. وجاء قانون المرور الجديد للتقليل من الحوادث. أين أصبحت مخالفة الرادار تتخللها غرامات مالية كما تصل إلى حد الجنحة والسجن مع سحب رخصة السياقة. في إحدى خرجات الدرك الوطني على مستوى الطريق الرابط بين مدينة الخروب والمدينة الجديدة علي منجلي، تمت مراقبة السيارات عن طريق جهاز الرادار لتأمين حركة السير، في نقطة حددت فيها السرعة القصوى بـ $60\,km/h$ ، والسائق الذي يتعدى هذه السرعة يتعرض إلى عقوبات على النحو التالي: من $61\,km/h$ إلى $66\,km/h$ مخالفة من الدرجة الثانية وغرامتها 2500 دج، $67\,km/h$ إلى $72\,km/h$ مخالفة من الدرجة الثالثة وغرامتها 3000 دج، من $73\,km/h$ إلى $78\,km/h$ مخالفة من الدرجة الرابعة وغرامتها 5000 دج من $79\,km/h$ فما فوق تعتبر جنحة.

الهدف من التمرين دراسة ميكانيكية لحركة سيارة على مسارين مائل و أفقي ، و دراسة تجريبية لصلاحية مكثفة

سيارة كتلتها $m = 3500\ kg$، تصل إلى الموضع (A) بسرعة v_A، حيث A هي بداية طريق مائل على المستوى الأفقي بزاوية $\alpha = 15°$، لتواصل بعد ذلك حركتها باتجاه الموضع (B) أعلى المستوى المائل (الشكل-3).



على كامل المسار كما أن السيارة خاضعة إلى القوة المحركةنعتبر شدة قوة الاحتكاك $\vec{f}$ على الطريق ABC ثابتة وجهتها عكس جهة الحركة، $\vec{F}$ يمثل (الشكل-4) مخطط السرعة للسيارة بين A و B،



I. الدراسة على المستوى المائل:

1. اتمم تمثيل القوى المؤثرة على السيارة حيث $\vec{F}$ هي القوة التي يؤثر بها محرك السيارة و شدتها ثابتة.
2. بيانيا: حدد مُعلِلاً جوابك طبيعة الحركة، ثم أحسب المسافة AB المقطوعة.
3. ما هو المرجع المناسب لدراسة الحركة؟ عرفه.
4. بتطبيق القانون الثاني لنيوتن عبر عن شدة القوة $\vec{F}$ بدلالة α، g، m، f ثم احسب شدتها.

يعطى: $sin15° = 0,26$ ، $f = 500\ N$ ، $g = 10\ m/s^2$.

II. السيارة على المستوى الأفقي:

تواصل السيارة حركتها على الطريق BC بتسارع ثابت a بعد قطع مسافة $BC = 250\ m$ تمر السيارة أمام رادار للدرك الوطني، وبعدة مدة من السير صادف حاجز للدرك الوطني، أوقفوه وأبلغوه أنه تجاوز السرعة المحددة عند النقطة C وعليه دفع غرامة مالية.

– تقدم السائق بشكوى مفادها أن هناك خطأ في اشتغال الرادار وأنه لم يتجاوز السرعة المحددة $120\ km/h$، كون أن سرعة السيارة كانت مضبوطة عند القيمة $120\ km/s$ عن طريق نظام تثبيت السرعة الخاص بالسيارة والذي كان يشتغل أثناء اجتيازه موقع الرادار .

1. نعتبر مبدأ الفواصل والأزمنة عند النقطة B .

أ– بتطبيق مبدأ انحفاظ الطاقة على الجملة (سيارة) بين الموضع B وموضع كيفي M فاصلته $x(t)$ وتبلغ السيارة عند اللحظة t بسرعة $v(t)$، أثبت العلاقة: $v^2 - {v_B}^2 = \frac{2F}{m}$.

ب– استنتج من العلاقة السابقة عبارة التسارع، ثم احسب قيمته.

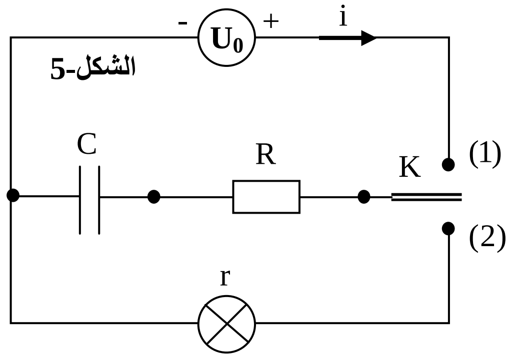
2. جِدْ المعادلتين الزمنيتين $v(t)$، $x(t)$ ، ثم حدد لحظة مرور السيارة بالرادار .
3. تأكد إذا تجاوز السائق السرعة المحددة أم لا، وحدد قيمة الغرامة التي يتلقاها في حالة تعدى السرعة المحددة.

III . طريقة اشتغال الرادار :

يرسل الرادار أمواجا كهرومغناطيسية باتجاه الطريق فتنعكس في السيارات المارة و تعود إلى الرادار، فإذا كانت سرعة السيارة تفوق السرعة المحددة يقوم الرادار بأخذ صورة واضحة للسيارة باستعمال الإضاءة القوية لمصباح آلة تصوير (*flash*).

– يعمل تجهيز مناسب على تفريغ مكثفة مشحونة تحت توتر $U_0 = 200\ V$ في المصباح خلال مدة زمنية قدرها $0,1\ s$ وهي المدة الزمنية اللازمة لأخذ صورة السيارة.

– القيمة المسجلة على المكثفة $C = 200\ \mu F$، بسبب كثرة استعمال الرادار يمكن لسعة المكثفة أن تنقص وبالتالي يمكن أن تتفرغ بفعل سرعات أصغر من السرعة المحددة.



الشكل-5

مصباح كهربائي

– عملا بشكوى السائق قام أحد تقني الدرك الوطني بربط مكثفة فارغة سعتها C مع مولد توتر مثالي قوته المحركة الكهربائية U_0، بادلة، مصباح مقاومته الداخلية r، ناقل أومي مقاومته $R = 80\Omega$، كما موضح في (الشكل5).

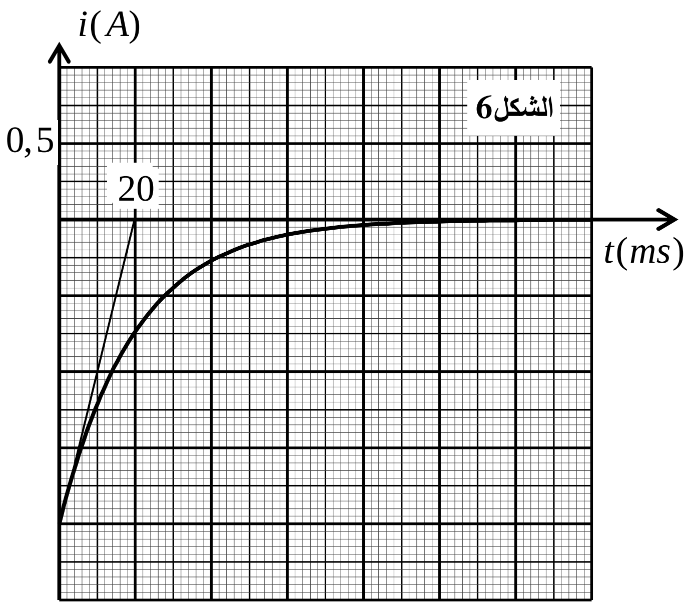
بعد وضع البادلة في الوضع (1) لمدة كافية لشحن المكثفة، ننقل البادلة إلى الوضع (2) عند اللحظة $t = 0$.

بعد وضع البادلة في الوضع (1) لمدة كافية لشحن المكثفة، ننقل البادلة إلى الوضع (2) عند اللحظة $t = 0$.

بواسطة راسم اهتزاز ذي ذاكرة نتحصل على منحنى (الشكل6).

1. اكتب المعادلة التفاضلية التي يحققها $i(t)$ شدة التيار الذي يجتاز الدارة عند تفريغ المكثفة (الوضع 2).

2. حل هذه المعادلة التفاضلية هو: $i(t) = -I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$، حيث I_0 شدة التيار الأعظمية المارة في الدارة، جِد عبارة ثابت الزمن τ، ما هو مدلوله الفيزيائي؟ ثم بين بالتحليل البعدي أن τ متجانس مع الزمن.



الشكل6

4. جِد عبارة شدة التيار الأعظمية I_0 بدلالة الثوابت U_0 ، R ، r.

5) الاعتمادا على بيان الشكل−6، جِد:

1.4. قيمتي I_0 و τ.

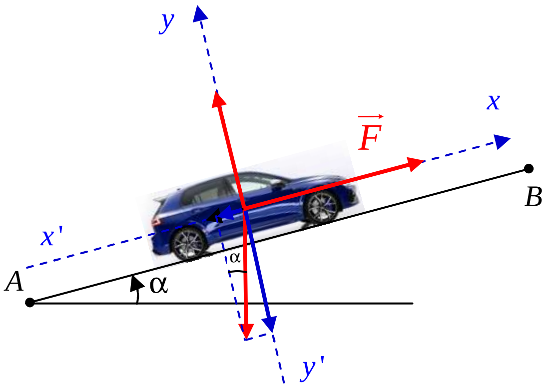
2.4. مقاومة المصباح r وسعة المكثفة C.

3.4. هل فعلا هناك خلل في الرادار أم هو تلاعب من طرف السائق للتهرب عن دفع الغرامة المالية ، علل.

الحل المفصل:

I. الدراسة على المستوي المائل:

1. إتمم تمثيل القوى المؤثرة على السيارة:



2. تحديد طبيعة الحركة:

المنحنى $v(t)$ هو مستقيم يوازي محور الأزمنة ومنه حركة مركز عطالة السيارة على الطريق المائلة مستقيمة منتظمة.

• حساب المسافة AB :

باستعمال طريقة المساحة في حساب المسافة يكون من بيان السرعة:

$$AB = 20 \times 20 = 400\, m$$

3. المرجع المناسب لدراسة الحركة:

هو المرجع السطحي الأرضي.

4. عبارة شدة القوة $\vec{F}$ بدلالة α ، g ، m ، f :

– الجملة المدروسة: سيارة.

– مرجع الدراسة: سطحي أرضي نعتبره غاليلي مزود بمعلم خطي $(o,\vec{i},\vec{k})$.

– القوة الخارجية المؤثرة: القوة $\vec{F}$، الثقل $\vec{P}$ ، قوة الاحتكاك $\vec{f}$ ، قوة رد الفعل $\vec{R}$.

– بتطبيق القانون الثاني لنيوتن حيث $a = 0$ كون أن الحركة مستقيمة منتظمة يكون:

$$\sum \vec{F}_{ext} = m.\vec{a}_G$$

$$\vec{F} + \vec{P} + \vec{R} + \vec{f} = 0$$

بالإسقاط على محور الحركة $(x'x)$:

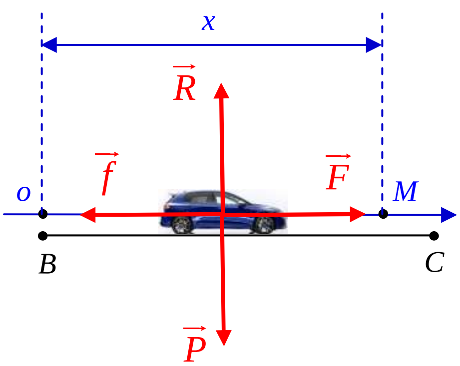
$$F - P.\sin\alpha - f = 0$$

$$F - m.g.\sin\alpha - f = 0 \Rightarrow F = m.g.\sin\alpha + f$$

$$F = (1465 \times 10 \times \sin 5) + 6223{,}17 = 7500\, N$$

II. السيارة على المستوي الأفقي:

أ– إثبات العلاقة $v^2 - v_B{}^2 = \dfrac{2(F-f).x}{m}$:



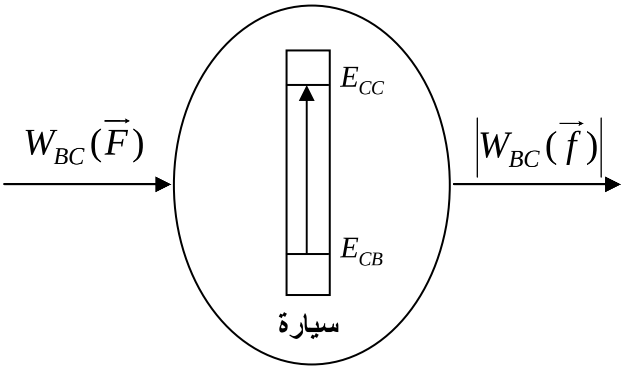
– الجملة المدروسة: سيارة.

– مرجع الدراسة: سطحي أرضي نعتبره غاليلي.

– القوة الخارجية المؤثرة: القوة $\vec{F}$، الثقل $\vec{P}$ ، قوة الاحتكاك $\vec{f}$ ، قوة رد الفعل $\vec{R}$.

– الحصيلة الطاقوية:

بتطبيق مبدأ انحفاظ الطاقة على الجملة (كرة) بين الموضعين A و B :



$$E_A + E_{\text{مكتسبة}} - E_{\text{مقدمة}} = E_B$$

$$E_{CB} + W(\vec{F}) - \left|W_{BC}(\vec{f})\right| = E_{CB}$$

$$\frac{1}{2}m{v_B}^2 + F.x - \left|-f.x\right| = \frac{1}{2}m.v^2 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}m{v_B}^2 + F.x - f.x = \frac{1}{2}m.v^2$$

$$\frac{1}{2}m{v_B}^2 + (F-f).x = \frac{1}{2}m.v^2 \Rightarrow$$

$$m{v_B}^2 + 2(F-f).x = m.v^2$$

$$2(F-f).x = m.v^2 - m{v_B}^2 \Rightarrow 2(F-f).x = m(v^2 - {v_B}^2) \Rightarrow v^2 - {v_B}^2 = \frac{2(F-f).x}{m}$$

<u>ب- استنتاج عبارة التسارع وحساب قيمته:</u>

لدينا $v^2 - {v_B}^2 = 2ax$ ، بالمطابقة مع العلاقة $v^2 - {v_B}^2 = \frac{2(F-f).x}{m}$ السابقة نجد:

$$2ax = \frac{2(F-f).x}{m} \Rightarrow a = \frac{F-f}{m} \Rightarrow a = \frac{7500-500}{3500} = 2\,m.s^{-2}$$

<u>2. إيجاد المعادلتين الزمنيتين $v(t)$ ، $x(t)$:</u>

مما سابق:

$$a = 2 \Rightarrow \frac{dv}{dt} = 2$$

بالتكامل نجد:

$$v(t) = 2t + b$$

من الشروط الابتدائية $v_0 = 20\,m.s^{-1}$ ، ومنه:

$$v(t) = 2t + 20$$

نكتب أيضا:

$$\frac{dx(t)}{dt} = 2t + 20$$

بالتكامل نجد:

$$x(t) = t^2 + 20t + x_0$$

من الشروط الابتدائية $x_0 = 0$ ، ومنه:

$$x(t) = t^2 + 20t$$

● <u>لحظة مرور السيارة بالرادار:</u>

عند بلوغ الرادار في الموضع B يكون $x_B = 250\,m$ بالتعويض في المعادلة $x(t)$ نجد:

$$250 = t_B^2 + 20t_B$$

$t_B^2 + 20t_B - 250 = 0$

- $\Delta = (20)^2 - ((4)\times(-250)) = 1400 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 37,42$
- $t_1 = \dfrac{-20+37,42}{2\times1} = 8,71s$ (مقبول)
- $t_2 = \dfrac{-20-37,42}{2\times1} = -28,71s$ (مرفوض)

ومن لحظة بلوغ السيارة الردار هي: $t_B = 8,71s$.

● سرعة لحظة مرور السيارة الرادار :

الطريقة الأولى:

بتعويض $t_B = 8,70s$ في معادلة السرعة نجد:

$$v_B = (2\times8,71)+20 = 37,42\,m/s$$

وبوحدة $(km.h^{-1})$ يكون:

$$v_B = 37,42\frac{m}{s} = 37,42\frac{\frac{1}{1000}km}{\frac{1}{3600}h} = 134,71km.h^{-1}$$

الطريقة الثانية:

$$v_C{}^2 - v_B{}^2 = 2a.BC \Rightarrow v_C = \sqrt{2a.BC + v_B{}^2}$$

$$v_C = \sqrt{2\times2\times250+(20)^2} = 37,42\,m.s^{-1} = 134,71km.h^{-1}$$

3. التأكد من تجاوز السائق السرعة المحددة أم لا وتحديد قيمة الغرامة التي يتلقاها في حالة تعدى السرعة المحددة:

وجدنا $v_C = 134,71km.h^{-1}$، نلاحظ أن $v_V > 120km.h^{-1}$، ومن السيارة تعدت السرعة المحدد، وبالتالي السائق ارتكب جنحة عقوبتها غرامة مالية تتراوح بين 20000 دج أو 50000 دج وقد تصل العقوبة إلى حد الحبس إذا كان السائق مسبوق قضائيا.

III. طريقة اشتغال الرادار:

1. اكتب المعادلة التفاضلية التي يحققها $i(t)$ شدة التيار الذي يجتاز الدارة عند تفريغ المكثفة (الوضع 2):

حسب قانون جمع التوترات:

$$u_R(t)+u_r(t)+u_C(t) = 0$$

$$R.i(t)+r.i(t)+\frac{q(t)}{C} = 0 \Rightarrow (R+r).i(t)+\frac{q(t)}{C} = 0$$

باشتقاق الطرفين نجد:

$$(R+r)\frac{di(t)}{dt}+\frac{1}{C}\frac{dq(t)}{dt} = 0$$

$$(R+r)\frac{di(t)}{dt}+\frac{1}{C}i(t)=0 \Rightarrow \frac{di(t)}{dt}+\frac{1}{(R+r)C}i(t)=0$$

2. إيجاد عبارة ثابت الزمن τ:

- $i(t)=-I_0\,e^{-\frac{t}{\tau}}$
- $\frac{di(t)}{dt}=-I_0(-\frac{1}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}) \Rightarrow \frac{di(t)}{dt}=\frac{I_0}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية:

$$\frac{I_0}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}+\frac{1}{(R+r)C}\left(-I_0\,e^{-\frac{t}{\tau}}\right)=0$$

$$\frac{I_0}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}-\frac{1}{(R+r)C}.I_0\,e^{-\frac{t}{\tau}}=0 \Rightarrow \Rightarrow I_0\,e^{-\frac{t}{\tau}}(\frac{1}{\tau}-\frac{1}{(R+r)C})=0$$

لكي تتحقق المساواة يجب أن يكون:

$$\frac{1}{\tau}-\frac{1}{(R+r)C}=0 \Rightarrow \frac{1}{\tau}=\frac{1}{(R+r)C} \Rightarrow \tau=(R+r)C$$

4. إيجاد عبارة شدة التيار الأعظمية I_0 بدلالة الثوابت U_0، R، r:

حسب قانون جمع التوترات:

$$u_R(t)+u_r(t)+u_C(t)=0$$
$$R.i(t)+r.i(t)+u_C(t)=0 \Rightarrow (R+r).i(t)+u_C(t)=0$$

من الشروط الابتدائية (عند اللحظة $t=0$):

$$t=0 \Rightarrow \begin{cases} i=-I_0 \\ u_C=U_0 \end{cases}$$

بالتعويض نجد:

$$(R+r)(-I_0)+U_0=0 \Rightarrow -(R+r).I_0+U_0=0$$
$$U_0=(R+r).I_0 \Rightarrow I_0=\frac{U_0}{(R+r)}$$

1.5. إيجاد قيمتي I_0 و τ:

من البيان:

- $-I_0=-(0,5\times 4)=-2A \Rightarrow I_0=2A$
- $t=\tau \Rightarrow i=-0,37\,I_0=-0,37\times 2=-0,74\,A$

بالإسقاط مع أخذ سلم الرسم بعين الاعتبار نجد $\tau=20\,mS$.

2.5. إيجاد قيمة مقاومة المصباح r:

$$I_0=\frac{U_0}{R+r} \Rightarrow R+r=\frac{U_0}{I_0} \Rightarrow r=\frac{U_0}{I_0}-R \Rightarrow r=\frac{200}{2}-80=20\Omega$$

• إيجاد قيمة سعة المكثفة C:

$$\tau=(R+r)C \Rightarrow C=\frac{\tau}{R+r} \Rightarrow C=\frac{20\times10^{-3}}{80+20}=2\times10^{-4}\,F=200\,\mu F$$

3.5. وجود خلل في الرادار أم هو تلاعب من طرف السائق للتهرب عن دفع الغرامة المالية:

نلاحظ أن قيمة السعة المتحصل عليها هي نفسها قيمة سعة مكثفة الرادار، وبالتالي لا وجود لخلل في الرادار، فقط السائق أراد أن يُفلت من العقاب.

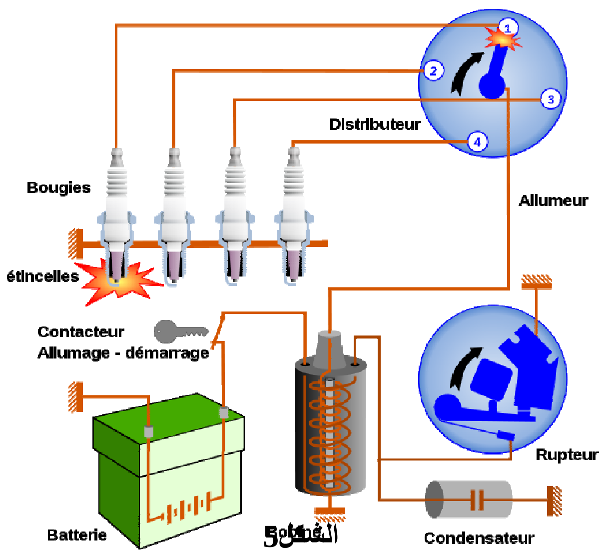
التمرين (35) :

صورة لشمعة احتراق المحرك

تحتوي مجموعة الدارات الكهربائية والإلكترونية على مكثفات ووشائع ويختلف تصرف هذه الدارات حسب التأثير الذي تفرضه هذه المركبات.

شمعة الاحتراق $(La\ Bougie)$ هي جهاز كهربائي يستعمل في محركات الاحتراق الداخلي للسيارة ذات المحرك الحراري على غرار كافة المركبات التي تشتغل بهذا النوع من المحركات، اخترعها البلجيكي **إيثان لينوار** سنة 1885.

عند وضع مفتاح التشغيل في وضع الإغلاق يمر تيار كهربائي عبر دارة كهربائية تحتوي على عناصر كهربائية من بينها الوشيعة، تغذي هذه الدارة ببطارية السيارة (الشكل5).

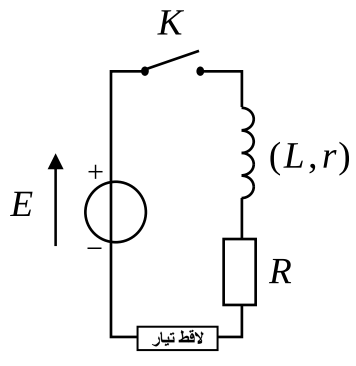


الشكل5

تعمل الدارة السابقة على توليد شرارة كهربائية على مستوى شموع الاحتراق والتي تؤدي إلى احتراق الوقود الموجود في غرفة الاحتراق داخل حجرة محرك السيارة وبالتالي تتولد الطاقة اللازمة لتحريك السيارة.

يهدف التمرين إلى دراسة ثنائي القطب RL وتحديد الذاتية L والمقاومة الداخلية r لوشيعة مستخرجة من دارة نظام الإشعال في السيارة.

من أجل هذا الغرض نحقق الدراة الكهربائية الموضحة في (الشكل6)، والتي تحتوي على العناصر الكهربائية التالية: مولد مثالي قوته المحركة الكهربائية $E=12V$، وشيعة مستخرجة من دارة نظام الإشعال في السيارة، ذاتيتها L ومقاومتها الداخلية r، ناقل أومي مقاومته $R=2{,}5\Omega$، سلسلة نظام $ExAO$، قاطعة K.



الشكل6

في اللحظة $t=0$، نقوم بغلق القاطعة، تسمح سلسلة نظام $ExAO$ بمتابعة تطور $i(t)$ شدة التيار الكهربائي الذي يجتاز الدارة والحصول على بيان (الشكل7).

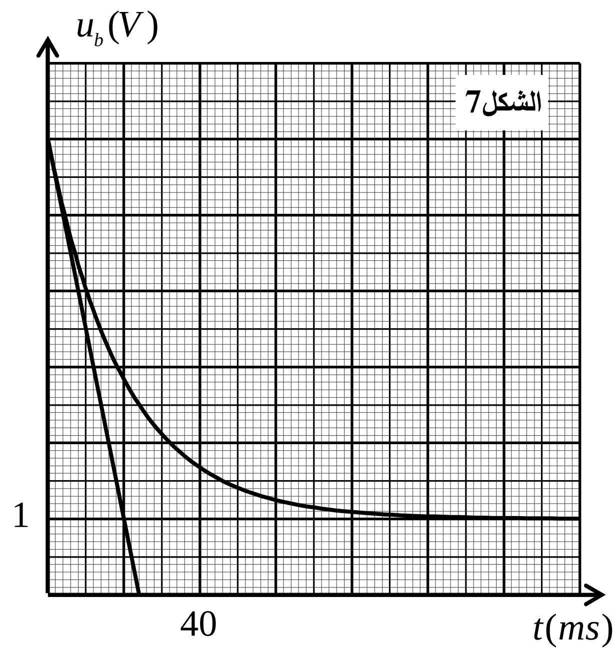
1. وضح بأسهم الاتجاه الاصطلاحي للتيار الكهربائي الذي يجتاز الدارة وكذا اتجاه التوترات u_L و u_R.

2. شدة التيار $i(t)$ التي تجتاز الدارة تتحكم فيها إحدى المعادلتين التفاضليتين:

$$\frac{di(t)}{dt}+\frac{R+r}{L}i(t)=\frac{E}{L} \quad \text{....................} \quad (1)$$

$$\frac{di(t)}{dt}+L(R+r)i(t)=\frac{E}{L} \quad \text{................} \quad (2)$$

بواسطة التحليل البعدي، بين أن المعادلة التفاضلية (1) صحيحة والمعادلة التفاضلية (2) خاطئة.



3. بين أن المعادلة التفاضلية الصحيحة من بين المعادلتين السابقتين تقبل حل من الشكل: $i(t)=A(1-e^{-\alpha t})$، حيث α و A مقادير ثابتة يطلب كتابة عبارتيهما بدلالة المقادير المميزة للدارة.

4- بين أن عبارة التوتر بين طرفي الوشيعة هي:

$$u_b(t)= rI_0+ RI_0e^{-t/\tau}$$

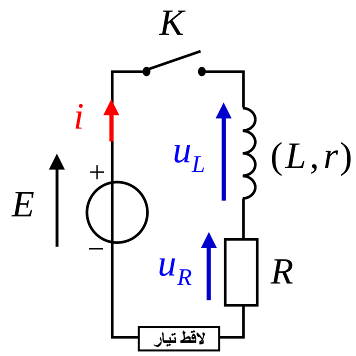
5- بيان (الشكل7) يمثل تطور التوتر $u_b(t)$ بين طرفي الوشيعة، عين منه قيمة ثابت الزمن τ.

6- أثبت أن: $r=\frac{R(t'-\tau)}{\tau}$.

حيث t' هي اللحظة التي يقطع فيها مماس للمنحنى $u_b=f(t)$ عند اللحظة $t=0$ محور الأزمنة، و r المقاومة الداخلية للوشيعة.

7- أحسب كل من قيمة r المقاومة الداخلية للوشيعة و قيمة L ذاتيتها.

الحل المفصل:



الشكل6

1. وضح بأسهم الاتجاه الاصطلاحي للتيار المار في الدارة واتجاه التوترات E، u_L و u_{R0}:

2. إثبات بالتحليل البعدي أن المعادلة التفاضلية (1) صحيحة والمعادلة التفاضلية (2) خاطئة:

لدينا:

- $u_R=R.i \Rightarrow [u]=[R].[i] \Rightarrow [R]=\frac{[u]}{[i]}$

- $u_b = L.\frac{di}{dt} \Rightarrow [u]=[L].\frac{[i]}{[t]} \; [L]=\frac{[u].[t]}{[i]}$

بالنسبة للمعادلة التفاضلية (1):

$$\frac{di(t)}{dt}+\frac{R_0+r}{L}i(t)=\frac{E}{L} \Rightarrow \frac{[i]}{[t]}+\frac{[R]}{[L]}.[i]=\frac{[u]}{[L]} \Rightarrow \frac{[i]}{[t]}+\frac{\frac{\cancel{[u]}}{[i]}}{\frac{\cancel{[u]}.[t]}{\cancel{[i]}}}.\cancel{[i]}=\frac{\cancel{[u]}}{\frac{\cancel{[u]}.[t]}{[i]}}$$

$$\frac{[i]}{[t]}+\frac{[i]}{[t]}=\frac{[i]}{[t]} \Rightarrow \frac{[i]}{[t]}=\frac{[i]}{[t]}$$

ومنه المعادلة التفاضلية (1) صحيحة.

بالنسبة للمعادلة التفاضلية (2):

$$\frac{di(t)}{dt}+L(R+r)i(t)=\frac{E}{L} \Rightarrow \frac{[i]}{[t]}+\frac{[u].[t]}{[i]}\frac{[u]}{\cancel{[i]}}\cancel{[i]}=\frac{\cancel{[u]}}{\frac{\cancel{[u]}.[t]}{[i]}}$$

$$\frac{[i]}{[t]}+\frac{[u]^2.[t]}{[i]}=\frac{[i]}{[t]} \Rightarrow \frac{[u]^2.[t]}{[i]}\neq\frac{[i]}{[t]}$$

ومنه المعادلة التفاضلية (2) غير صحيحة.

<u>3. تحديد عبارتي α و A وبدلالة المقادير المميزة للدارة:</u>

- $i(t)=A(1-e^{-\alpha t})$
- $\frac{di(t)}{dt}=A(0-(-\alpha e^{-\alpha t})) \Rightarrow \frac{di(t)}{dt}=\alpha A e^{-\alpha t}$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية الصحيحة نجد:

$$\alpha A e^{-\alpha t}+\frac{R+r}{L}.A(1-e^{-\alpha t})=\frac{E}{L}$$
$$\alpha A e^{-\alpha t}+\frac{A(R+r)}{L}-\frac{A(R+r)}{L}e^{-\alpha t}=\frac{E}{L}$$
$$Ae^{-\alpha t}(\alpha-\frac{(R+r)}{L})+\frac{A(R+r)}{L}=\frac{E}{L}$$

حتى تتحقق المساواة يجب أن يكون:

- $\alpha-\frac{R+r}{L}=0 \Rightarrow \alpha=\frac{R+r}{L}$
- $\frac{A(R+r)}{L}=\frac{E}{L} \Rightarrow A=\frac{E}{R+r}$

4- تبيين أن عبارة التوتر بين طرفي الوشيعة هي $u_b(t) = rI_0 + RI_0 e^{-t/\tau}$:

حسب قانون جمع التوترات:

$$u_b(t)+u_R(t)=E \Rightarrow u_b(t)=E-u_R(t) \Rightarrow u_b(t)=E-R.i(t)$$

عند غلق القاطعة لدينا: $i(t)=\frac{E}{R+r}(1-e^{-\frac{R+r}{L}t})$، ومنه:

$$u_R(t)=E-R.\frac{E}{R+r}(1-e^{-\frac{R+r}{L}t})$$

$$u_R(t)=E-\frac{RE}{R+r}+\frac{RE}{R+r}e^{-\frac{R+r}{L}t} \Rightarrow u_R(t)=\frac{RE+rE-RE}{R+r}+\frac{RE}{R+r}e^{-\frac{R+r}{L}t}+$$

$$u_R(t)=\frac{rE}{R+r}+\frac{RE}{R+r}e^{-\frac{R+r}{L}t} \Rightarrow u_b(t)=rI_0+RI_0e^{-t/\tau}$$

5- أوجد من البيان (الشكل6) قيمة ثابت الزمن τ:

من مماس المنحنى $u_b(t)$ عند الحظة $t=0$ يكون: $\tau = 20ms$.

6- أثبات أن $r=\frac{R(t'-\tau)}{\tau}$:

نكتب أولا معادلة المماس عند اللحظة $t=0$ التي تكون من الشكل:

$$u_b(t)=a\,t+b$$

- $a=\left(\frac{du_b}{dt}\right)_{(t=0)}=\left(\frac{d(rI_0+RI_0e^{-t/\tau})}{dt}\right)_{(t=0)}=\left(-\frac{RI_0}{\tau}e^{-t/\tau}\right)_{(t=0)} \Rightarrow a=-\frac{RI_0}{\tau}$
- $b=(u_b)_{(t=0)}=\left(rI_0+RI_0e^{-t/\tau}\right)_{(t=0)}=rI_0+RI_0 \Rightarrow b=I_0(r+R)$

ومنه تصبح معادلة المماس كما يلي:

$$u_b(t)=-\frac{RI_0}{\tau}t+I_0(r+R)$$

عند تقاطع المماس مع محور الأزمة في اللحظة t' يكون $u_b(t')=0$، ومنه:

$$0=-\frac{RI_0}{\tau}t'+I_0(r+R) \Rightarrow \frac{R\cancel{I_0}}{\tau}t'=\cancel{I_0}(r+R) \Rightarrow \frac{R}{\tau}t'=r+R \Rightarrow Rt'=\tau r+\tau R$$

$$Rt'-\tau R=\tau r \Rightarrow R(t'-\tau)=\tau r \Rightarrow r=\frac{R(t'-\tau)}{\tau}$$

7- حساب r قيمة المقاومة الداخلية للوشيعة:

من البيان $t'=1,2\times 20=24ms$، ومن العبارة السابقة يكون:

$$r=\frac{40(24-20)\times 10^{-3}}{20\times 10^{-3}}=8\Omega$$

• إيجاد L قيمة ذاتيتها:

$$\tau = \frac{L}{R+r} \Rightarrow L = \tau(R+r) \Rightarrow L = 20\times10^{-3}(40+8) = 0,96\,H$$

التمرين (36) :

مرت عدة سنوات على التفجيرات والتجارب النووية للمستعمر الفرنسي التي ما تزال تخلف ضحايا في الجنوب الجزائري الشاسع، وذلك من يوم الانفجار الموافق لـ 13فيفري 1960 أين سجل المستعمر الفرنسي دخوله المدوي إلى نادي القوى النووية مخلفا وراءه بالحمودية ضواحي رقان نفايات نووية إثر الانفجار المريع والتي لازالت بعد نصف قرن تلحق اضرارا بالبيئة والسكان بسبب الإشعاعات المخلفة.

يعتبر كل من نظير السيزيوم $^{137}_{55}Cs$ ونظير اليود $^{131}_{53}I$ أهم التظائر المؤثرة على الصحة بعد الانفجار النووي.

يهدف التمرين لدراسة النشاط الإشعاعي لكل من نظيري اليود $^{131}_{53}I$ والسيزيوم $^{137}_{55}Cs$.

1– نواة اليود $^{131}_{53}I$ مشعة ينتج عن تفككها نواة الكزينون $^{A}_{Z}Xe$ في حالة إثارة وفق نمط تفكك β^-.

أ– اكتب معادلة التفاعل النووي الحادث، وعين كل من A و Z.

ب– عند رجوع النواة الناتجة المثارة إلى حالتها الأساسية تبعث إشعاع شديد النفاذية.

– اكتب معادلة تحولها النووي مع تحديد اسم الإشعاع.

2– من أجل تحديد زمن نصف العمر لنواة $^{131}_{53}I$ نستعمل المنحنى البياني $f(t) = \frac{N_d(t)}{N(t)}$ الممثل في (الشكل6)

أ– اكتب عبارة التناقص الإشعاعي $N(t)$ بدلالة N_0، λ و t.

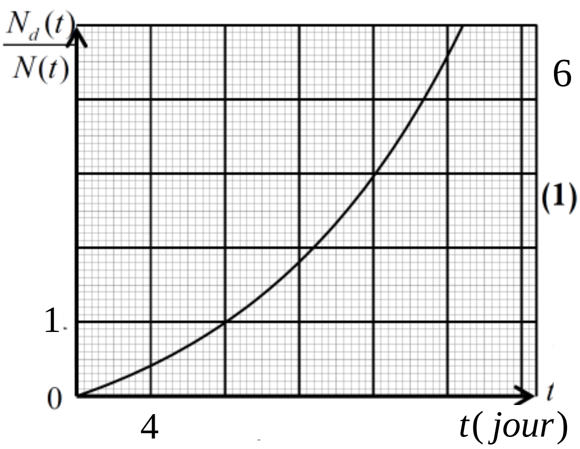
ب– استنتج عبارة الأنوية المتفككة $N_d(t)$ بدلالة N_0، λ و t.

جـ– أثبت من العلاقات السابقة أن: $\frac{N_d(t)}{N(t)} = e^{\lambda t} - 1$.

د– اعتمادا على (الشكل6) حدد زمن نصف العمر $t_{1/2}$ لنواة $^{131}_{53}I$.

3– نعتبر أن المنطقة تلوثت إشعاعيا باليود $^{131}_{53}I$ فقط بحيث كان النشاط الإشعاعي آنذاك $A_0 = 1,76\times10^{9}\,GBq$.

– حدّد التاريخ الذي نعتبر فيه هذه المنطقة أصبحت غير ملوثة باليود إذا اعتبرنا أن المنبع غير فعال عندما يبلغ نشاطه الإشعاعي $1Bq$.



الشكل (1)

4- تتفكك نواة السيزيزم $^{137}_{55}Cs$ إلى نواة الباريوم $^{137}_{56}Ba$ مع إصدار إشعاع $^{A}_{Z}X$، زمن نصف عمرها يساوي: $t_{1/2}=30,1ans$.

يصل التلوث النووي لمنطقة مساحتها $10000\,Km^2$، حيث كان النشاط الإشعاعي يساوي $555\,KBq$ لكل $1m^2$.

أ- اكتب معادلة تفكك نواة $^{137}_{55}Cs$ مع تحديد نمط الإشعاع.

ب- احسب عدد الأنوية $^{137}_{55}Cs$ لكل $1m^2$.

جـ- احسب كتلة السيزيوم 137 بالكيلوغرام (Kg) الموجودة في المساحة $10000\,Km^2$.

5- إذا علمت أن منظمة الأمم المتحدة العلمية المعنية بآثار الإشعاع الذري $(UNSCEAR)$ تشترط ألا يتعدى النشاط الإشعاعي الحد الأدنى، والذي يساوي $37KBq.m^{-2}$.

- حدد التاريخ الذي تصبح فيه المنطقة قابلة الاستخدام.

المعطيات: $1an\approx 365\ jours$ ،$1moi=30\ jour$ ، $N_A=6,023\times10^{23}\,mol^{-1}$ ،$1GBq=10^9\,Bq$.

الحل المفصل:

1- أ- كتابة معادلة التفاعل النووي الحادث، وعين كل من A و Z:

$$^{131}_{53}I \rightarrow \,^{A}_{Z}Xe + \,^{0}_{-1}e$$

حسب قانوني الانحفاظ:

- $131=A+0 \Rightarrow \quad A=131$
- $53=Z-1 \Rightarrow Z=54$

ومنه المعادلة تصبح:

$$^{131}_{53}I \rightarrow \,^{131}_{54}Xe^* + \,^{0}_{-1}e$$

ب- كتابة معادلة التحول النووي للنواة المثارة:

$$^{131}_{54}Xe^* \rightarrow \,^{131}_{54}Xe + \,^{0}_{0}\gamma$$

2- أ- كتابة عبارة التناقص الإشعاعي $N(t)$ بدلالة N_0، λ و t:

$$N(t)=N_0\,e^{-\lambda t}$$

ب- عبارة عدد الأنوية المتفككة $N_d(t)$ بدلالة N_0، λ و t:

$$N_d(t)=N_0-N(t)$$

وحيث أن $N(t)=N_0\,e^{-\lambda t}$ ، يكون:

$$N(t)=N_0-N_0\,e^{-\lambda t} \;\Rightarrow\; N(t)=N_0\,(1-e^{-\lambda t})$$

جـ- إثبات أن $\dfrac{N_d(t)}{N(t)}=e^{\lambda t}-1$:

اعتمادا على ما سبق نكتب:

$$\frac{N_d(t)}{N(t)}=\frac{N_0(1-e^{-\lambda t})}{N_0e^{-\lambda t}} \Rightarrow \frac{N_d(t)}{N(t)}=\frac{1-e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda t}} \Rightarrow \frac{N_d(t)}{N(t)}=\frac{1}{e^{-\lambda t}}-1 \Rightarrow \frac{N_d(t)}{N(t)}=e^{\lambda t}-1$$

د- تحديد زمن نصف العمر $t_{1/2}$ لنواة $^{131}_{53}I$:

اعتمادا على العبارة السابقة نكتب:

$$\frac{N_d(t)}{N(t)} = e^{\frac{\ln 2}{t_{1/2}}t} - 1$$

عند اللحظة $t = t_{1/2}$ يكون:

$$\frac{N_d(t)}{N(t)} = e^{\frac{\ln 2}{t_{1/2}}t_{1/2}} - 1 \Rightarrow \frac{N_d(t)}{N(t)} = e^{\ln 2} - 1 \Rightarrow \frac{N_d(t)}{N(t)} = 1$$

بالإسقاط في البيان نجد: $t_{1/2} = 8\ jours$.

3- تحديد التاريخ الذي نعتبر فيه المنطقة أصبحت غير ملوثة باليود:

نحسب المدة الزمنية اللازمة حتى يصبح نشاط اليود يساوي $A = 1Bq$ بعد أن كان $A_0 = 1{,}76\times10^9\ Bq$ يوم الانفجار.

$$A = A_0 e^{-\lambda t} \Rightarrow e^{-\lambda t} = \frac{A}{A_0} \Rightarrow -\lambda t = \ln\left(\frac{A}{A_0}\right) \Rightarrow -\frac{\ln 2}{t_{1/2}}t = \ln\left(\frac{A}{A_0}\right)$$

$$t = -\ln\left(\frac{A}{A_0}\right).\frac{t_{1/2}}{\ln 2} \Rightarrow t = -\ln\left(\frac{1{,}76\times10^9\times10^9}{1}\right).\frac{8}{\ln 2}$$

$$t = 484{,}88\,an \Rightarrow t = 484an + 0{,}88an \Rightarrow t = 484an + (0{,}88\times12)moi \Rightarrow t \approx 484an + 4moi$$

يوم الانفجار هو 13 فيفري 1963، عندما نضيف لها المدة $t \approx 484an + 4moi$، نحصل على التاريخ الذي نعتبر فيه المنطقة أصبحت غير ملوثة باليود وهو يوم: 13 جوان 1961.

4- أ- كتابة معادلة تفكك نواة $^{137}_{55}Cs$ مع تحديد نمط الإشعاع:

$$^{137}_{55}Cs \longrightarrow {}^{137}_{56}Ba + {}^{A}_{Z}X$$

حسب قانوني الانحفاظ:

- $137 = 137 + A \Rightarrow A = 0$
- $55 = 56 + Z$

ومنه $^{A}_{Z}X$ هو $^{0}_{-1}e$ والمعادلة تصبح:

$$^{137}_{55}Cs \longrightarrow {}^{137}_{56}Ba + {}^{0}_{-1}e$$

ب- حساب عدد الأنوية $^{137}_{55}Cs$ لكل $1m^2$:

$$A = \lambda N \Rightarrow A = \frac{\ln 2}{t_{1/2}}N \Rightarrow N = \frac{A.t_{1/2}}{\ln 2}$$

$$N = \frac{555\times10^3\times30{,}1\times365\times24\times3600}{\ln 2} = 7{,}60\times10^{14}\ noyaux$$

جـ- حساب كتلة السيزيوم 137 بالكيلوغرام (Kg) الموجودة في المساحة $10000\,Km^2$:

نحسب أولا كتلة السيزيوم137 الموجودة في المساحة $1m^2$ التي نشاطها $A=555\,KBq$ ، ويحتوي على عدد من أنوية المشعة قدره $N=7,60\times10^{14}\,noyaux$.

$$\frac{N}{N_A}=\frac{m'}{M}\Rightarrow m'=\frac{N.M}{N_A}\Rightarrow m'=\frac{7,60\times10^{14}\times137}{6,02\times10^{23}}=1,73\times10^{-7}\,g=1,73\times10^{-10}\,Kg$$

نحسب الآن كتلة السيزيوم 137 الموجودة في المساحة $10000\,Km^2$ باستعمال القاعدة الثلاثية، مع الأخذ بعين الاعتبار أن $10000\,Km^2=10000\times10^6\,m^2$:

$$\begin{cases}1m^3\rightarrow1,73\times10^{-10}\,Kg\\10000\times10^6m^3\rightarrow m(Kg)\end{cases}\Rightarrow m=\frac{10000\times10^6\times1,73\times10^{-10}}{1}=1,73\,Kg$$

5- تحدد التاريخ الذي تصبح فيه المنطقة قابلة الاستخدام:

نحسب المدة الزمنية التي يصبح فيها النشاط الإشعاعي $A=37\,KBq$ في كل $1m^2$، بعد أن كان $A_0=555\,KB$ يوم الإنفجار.

$$A=A_0e^{-\lambda t}\Rightarrow e^{-\lambda t}=\frac{A}{A_0}\Rightarrow-\lambda t=\ln\left(\frac{A}{A_0}\right)\Rightarrow-\frac{\ln2}{t_{1/2}}t=\ln\left(\frac{A}{A_0}\right)$$

$$t=-\ln\left(\frac{A}{A_0}\right).\frac{t_{1/2}}{\ln2}\Rightarrow t=-\ln\left(\frac{37\times10^3}{555\times10^3}\right).\frac{30,1}{\ln2}=117,6=117\,an+7moi+9\,jour$$

وفي ما يلي نوضح كيف تم تحول المدة من السنة إلى السنة والشهر واليوم:

$t=117,6\,ans$

$t=117\,an+0,6\,an$

$t=117\,an+(0,6\times12moi)$

$t=117\,an+(7,2\,moi)$

$t=117\,an+\ 7moi+0,2moi)$

$t=117\,an+\ 7moi+(0,2\times30\ jour)$

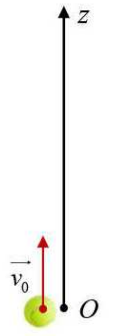
$t=117\,an+\ 7moi+(6\ jour)$

يوم الانفجار هو 13 فيفري 1963، عندما نضيف لها المدة $t=117\,an+\ 7moi+(6\ jour)$، نحصل على التاريخ الذي تصبح فيه المنطقة قابلة الاستخدام وهو تقريبا يوم: 19 سبتمبر 2077.

التمرين (37) :

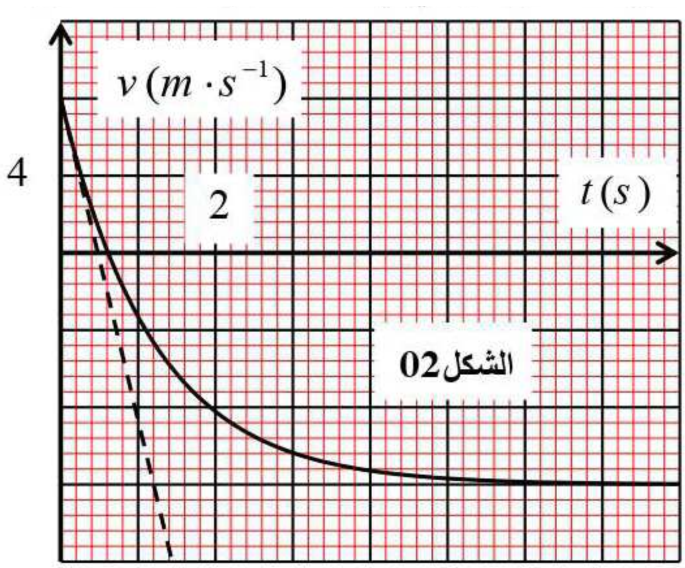
خلال حصة الأعمال المخبرية قام أحد التلاميذ، بقذف كرة تنس شاقوليا نحو الأعلى في اللحظة $t=0$ بسرعة ابتدائية $\vec{v}_0$ من نقطة O نعتبرها مبدأ لمعلم شاقولي $(O,\vec{k})$ موجه نحو الأعلى ومرتبط بمرجع عطالي مناسب (الشكل1).

تخضع الكرة خلال حركتها الشاقولية لثقلها $\vec{P}$ وقوة احتكاك $\vec{f}$ عبارتها من الشكل: $\vec{f}=-k\vec{v}$.



الشكل -01

1. ما هو المرجع المناسب لدراسة حركة الكرة، وما هو الشرط اللازم ليكون عطاليا.
2. بين أن دافعة أرخميدس $\vec{\Pi}$ مهملة أمام الثقل $\vec{P}$.
3. مثل القوى الخارجية المؤثرة على الكرة خلال مرحلة الصعود.
4. بتطبيق القانون الثاني لنيوتن، جِد المعادلة التفاضلية المميزة لحركة مركز عطالة الكرة بدلالة سرعتها $v(t)$.
5. جِد عبارة السرعة الحدية $v_{\lim}$ التي تبلغها الكرة خلال حركتها بدلالة k ، g و m .
6. الدراسة التجريبية لحركة مركز عطالة الكرة مكنت من الحصول على المنحنى البياني $v(t)$ الممثل لتطور سرعة الكرة بدلالة الزمن(الشكل2).



الشكل02

– باستغلال البيان:

أ. جِد اللحظة t_1 التي تغير عندها الكرة جهة حركتها، ثم استنتج قيمة تسارعها عند هذه اللحظة.

ب.عَدّدْ أطوار الحركة محدد طبيعتها في كل طور.

جـ. حدد قيمة ثابت الزمن τ ، ثم استنتج قيمة ثابت الاحتكاك k.

د. جِدْ قيمة كل من $v_{\lim}$ ، والتسارع الابتدائي a_0 .

هـ. جِدْ اللحظة t_2 التي يصبح عندها تسارع الكرة $a=-1,3m.s^{-2}$.

7. مثل بشكل تقريبي منحنى تطور تسارع حركة مركز عطالة الكرة بدلالة الزمن.
8. نملأ الكرة بالماء ثم نعيد التجربة بنفس الشروط. مثل بشكل كيفي مع المنحنى السابق بيان تطور سرعة الكرة في هذه الحالة. مع التعليل.

معطيات: – كتلة الكرة $m=58\,g$ ، الكتلة الحجمية للهواء $\rho_{air}=1,29\,kg.m^{-3}$ ، حجم الكرة $V=143,8\,cm^3$ ، تسارع الجاذبية الأرضية $g=10\,m.s^{-2}$.

الحل المفصل:

1. المرجع المناسب لدراسة حركة الكرة والشرط اللازم ليكون عطاليا:

المرجع السطحي الأرضي، والشرط اللازم ليكون عطاليا هو مدة دراسة الحركة قصيرة أمام دور الأرض حول محورها.

2. تبيين أن دافعة أرخميدس $\vec{\Pi}$ مهملة أمام الثقل $\vec{P}$:

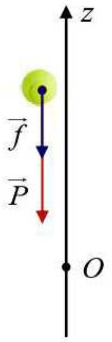
$$\frac{P}{\Pi}=\frac{m.\cancel{g}}{\rho_{air}.V.\cancel{g}} \Rightarrow \frac{P}{\Pi}=\frac{m}{\rho_{air}.V} \Rightarrow \frac{P}{\Pi}=\frac{58\times10^{-3}}{1,29\times143,8\times10^{-6}}=312,7 \Rightarrow P=312,7\times\Pi$$

نلاحظ شدة قو الثقل أكبر بكثير من شدة دافعة أرخميدس ومنه دافعة أرخميدس مهملة أمام الثقل.

3. تمثيل القوى الخارجية المؤثرة على الكرة خلال مرحلة الصعود:

(الشكل)

4. إيجاد المعادلة التفاضلية المميزة لحركة مركز عطالة الكرة بدلالة سرعتها $v(t)$:



– الجملة المدروسة: كرة.
– مرجع الدراسة: سطحي أرضي نعتبره غاليلي مزود بمعلم خطي $(o,\vec{k})$.
– القوى الخارجية المؤثرة: الثقل $\vec{P}$، قوة الاحتكاك $\vec{f}$.
– بتطبيق القانون الثاني لنيوتن:

$$\sum F_{ext}=m.\vec{a}_G$$
$$\vec{P}+\vec{f}=m.\vec{a}_G$$

بالإسقاط على محور الحركة (oz):

$$-P-f=m.a \Rightarrow -m.g-k.v(t)=m\frac{dv(t)}{dt} \Rightarrow m\frac{dv(t)}{dt}+k.v(t)=-m.g$$

$$\frac{dv(t)}{dt}+\frac{k}{m}v(t)=-g$$

5. إيجاد عبارة السرعة الحدية $v_{\lim}$ التي تبلغها الكرة خلال حركتها بدلالة k، g و m:

في النظام الدائم أين: $v=v_{\lim}$، $\frac{dv}{dt}=0$، نكتب:

$$\frac{k}{m}v_{\lim}=-g \Rightarrow v_{\lim}=-\frac{mg}{k}$$

6. أ. إيجاد اللحظة t_1 التي تغير عندها الكرة جهة حركتها:

عند بلوغ أقصى ارتفاع تغير الكرة جهة حركتها وتنعدم سرعتها، ومن البيان لحظة انعدام السرعة والتي نفسها التي غيرت فيها الكرة جهة حركتها هي:

$$t_1=0,6\times\left(\frac{2}{2}\right)=0,6\,s$$

● استنتاج قيمة تسارعها عند هذه اللحظة:

اعتمادا على ما سبق نكتب:

$$m\frac{dv(t)}{dt}+k.v(t)=-m.g \Rightarrow m.a(t_1)+k.v(t_1)=-m.g$$

تبلغ الكرية أقصى عند اللحظة $t_1=0,6\,s$ وتكون السرعة عندئذ معدومة $v(t_1)=0$، بالتعويض نجد:

$$m.a(t_1)=-m.g \Rightarrow a(t_1)=-g \Rightarrow a(t_1)=-10\,m/s^2$$

ملاحظة:

يمكن حساب التسارع عند اللحظة t_1 بحساب ميل المماس عند هذه اللحظة.

ب. تحديد أطوار الحركة وطبيعتها في كل طور:

▪ الطور الأول $(0\le t\le 0,6\,s)$:

المنحنى $v(t)$ هو خط منحني غير مستقيم، وكون أن $v>0$، $a<0$ (الميل سالب)، يكون $a.v<0$، فالحركة في هذا الطور مستقيمة متباطئة (دون انتظام).

▪ الطور الثاني $(0,6\le t\le 6\,s)$:

المنحنى $v(t)$ هو خط منحني غير مستقيم، وكون أن $v<0$، $a<0$ (الميل سالب)، يكون $a.v<0$، فالحركة في هذا الطور مستقيمة متسارعة (دون انتظام).

▪ الطور الثالث $(t\ge 6\,s)$:

المنحنى $v(t)$ هو خط مستقيم يوازي محور الأزمنة ما يعني أن السرعة ثابتة، وبالتالي فالحركة في هذا الطور مستقيمة منتظمة.

جـ. تحديد قيمة ثابت الزمن τ:

بالاعتماد على مماس المنحنى $v(t)$ عند اللحظة $t=0$، نجد $\tau=1,2\,s$.

● استنتاج قيمة ثابت الاحتكاك k:

$$\tau=\frac{m}{k} \Rightarrow k=\frac{m}{\tau} \Rightarrow k=\frac{58\times10^{-3}}{1,2}=4,83\times10^{-2}\,kg/s$$

د. إيجاد قيمة $v_{\lim}$:

من البيان عند بلوغ النظام الدائم يكون: ر $v_{\lim}=-12\,m/s$.

● إيجاد قيمة التسارع الابتدائي a_0:

$a=\frac{dv}{dt}$، ومنه التسارع يمثل ميل مماس البيان عند اللحظة المعتبرة، وعند اللحظة $t=0$ يكون من البيان:

$$a_0=\frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow a_0=\frac{(-3-2)\times4}{(1,2-0)}=-16,67\,m/s^2$$

هـ. إيجاد اللحظة t_2 التي يصبح عندها تسارع الكرة $a=-1,3\,m.s^{-2}$:

نحسب أولا سرعة الكرة عند اللحظة t_1، واعتمادا على ما سبق نكتب:

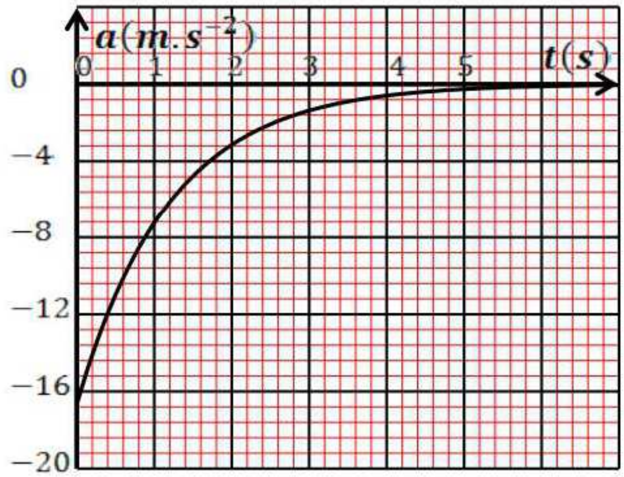
$$m\frac{dv(t_2)}{dt}+k.v(t_2)=-m.g \Rightarrow m.a(t_1)+k.v(t_1)=-m.g$$

$$v(t_1)=\frac{-m.g-m.a(t_1)}{k}\Rightarrow v(t_1)=\frac{-m\left(g-a(t_1)\right)}{k}$$

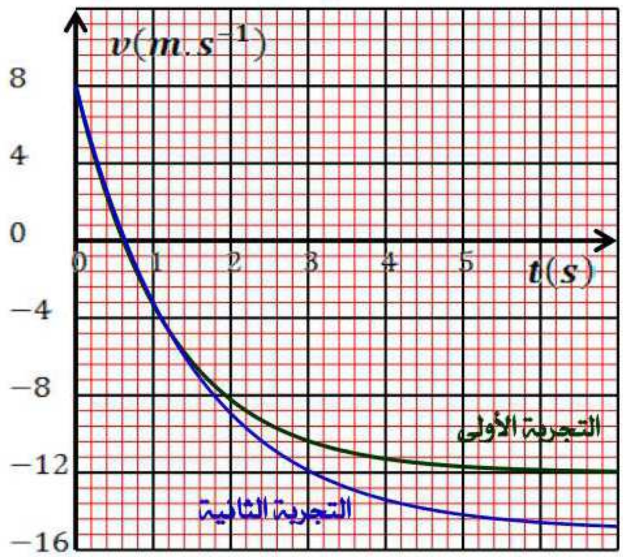
$$v(t_1)=\frac{-58\times10^{-3}\left(10-1,3\right)}{4,83\times10^{-2}}=-10,45\,m/s$$

بالإسقاط في البيان مع أخذ سلم الرسم بعين الاعتبار، نجد: $t_2=3s$.

7. تمثيل تقريبي لمنحنى تطور تسارع حركة مركز عطالة الكرة بدلالة الزمن:



8. تمثيل كيفي مع المنحنى السابق بيان تطور سرعة الكرة:



في حالة ملء الكرة بالماء تزيد كتلتها ولا يتغير ثابت الاحتكاك لعدم تغير سطح التلامس، وبالتالي:

– يزداد ثابت الزمن $\tau=\frac{m}{k}$.

– وتزداد السرعة الحدية $v_{\lim}=\frac{m.g}{k}$.

– وتقل قيمة التسارع الابتدائي، لأن: $\frac{dv(t)}{dt}+\frac{k}{m}v(t)=-g$،

وعند اللحظة $t=0$، يكون:

$$a_0+\frac{k}{m}v_{\lim}=-g\ \Rightarrow\ a_0=-g-\frac{k}{m}v_{\lim}$$

وكان سابقا $a_0=-g$ لأن دافعة أرخميدس مهملة.

التمرين (38) :

كرة مطاطية مملوء بغاز ثنائي أكسيد الكربون كتلتها (m) ونصف قطرها $r=10\,cm$، نهمل كتلة المطاط أمام كتلة الغاز.

نترك هذه الكرة تسقط عند اللحظة $t=0$ دون سرعة ابتدائية شاقوليا من ارتفاع h عن سطح الأرض في جو هادئ.

تخضع الكرة أثناء سقوطها لتأثير الهواء الذي نُنَمذجه بقوة احتكاك مائع شدتها $f = kv^2$ ، وشعاعها معاكس لشعاع السرعة ودافعة أرخميدس $F_A = m_0 g$ حيث m_0 هي كتلة الهواء المُزاح من طرف الكرة. ننسب حركة الكرة لمرجع سطحي أرضي نعتبره غاليليا مرتبط بمحور شاقولي موجه نحو الأسفل $(Z'Z)$.

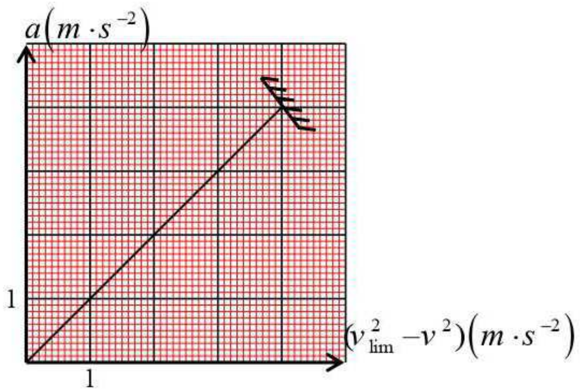
المعطيات:

- حجم الكرة: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ ، $g = 10 m.s^{-2}$
- الكتلة الحجمية للهواء: $\rho_a = 1,12 kg / m^3$
- الكتلة الحجمية لغاز ثنائي أكسيد الكربون $\rho_{CO_2} = 1,87 kg.m^{-3}$.
- الكتلة الحجمية لغاز الهيليوم $\rho_{He} = 0,17 kg.m^{-3}$.

1- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن بين أن المعادلة التفاضلية لسرعة الكرة تكتب بالشكل: $\frac{dv(t)}{dt} + \frac{k}{m}v^2(t) = \frac{k}{m}v_{\lim}^2$.

2- أثناء سقوط الكرة قيمة تسارعها تتناقص، فسر ذلك.

3- بواسطة تجهيز خاص وبرنامج معلوماتي تمكنا من تحديد سرعة الكرة في لحظات مختلفة وقيمة مشتق السرعة بالنسبة للزمن في تلك اللحظات، ثم مثلنا بيانيا $a = f(v_{\lim}^2 - v^2)$ ، حيث a هو التسارع اللحظي للكرة (الشكل4).



الشكل (04)

أ- حساب m كتلة الكرة و m_0 كتلة الهواء المزاح.

ب- اعتمادا على البيان، احسب: ثابت الاحتكاك k والتسارع الابتدائي a_0 للكرة.

جـ- تكتسب الكرة في اللحظة $t = 1,5 s$ سرعة حدية $(v_{\lim})$. احسب قيمة $v_{\lim}$.

4- احسب سرعة الكرة في اللحظة $t = 1,5 s$ لو سقطت في الفراغ.

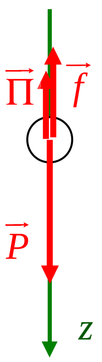
5- نعيد نفس التجربة في نفس الشروط بكرة لها نفي الحجم مملوءة بغاز الهيليوم.

أ- احسب شدة دافعة أرخميدس المؤثرة على الكرة ثم احسب ثقل الكرة.

ب- مثل القوى المؤثرة على الكرة عند اللحظة $t = 0$ ، ثم بعد انطلاقها.

الحل المفصل:

1- تبيين أن المعادلة التفاضلية لسرعة الكرة تكتب بالشكل: $\frac{dv(t)}{dt} + \frac{k}{m}v^2(t) = \frac{k}{m}v_{\lim}^2$:



- الجملة المدروسة: كرة مطاطية.
- مرجع الدراسة: سطحي أرضي نعتبره غاليلي مزود بمعلم خطي $(o, \vec{k})$.
- القوى الخارجية المؤثرة: الثقل $\vec{P}$ ، دافعة أرخميدس $\vec{\Pi}$ ، قوة الاحتكاك $\vec{f}$.
- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن:

$$\sum F_{ext} = m.\vec{a}_G$$
$$\vec{P} + \vec{\Pi} + \vec{f} = m.\vec{a}_G$$

بالإسقاط على محور الحركة (oz):

$$P - \Pi - f = m.a \Rightarrow mg - m_0 g - kv^2(t) = m\frac{dv(t)}{dt} \Rightarrow m\frac{dv(t)}{dt} + kv^2(t) = mg - m_0 g$$

$$\frac{dv(t)}{dt} + \frac{k}{m}v^2(t) = g - \frac{m_0 g}{m}$$

$$\frac{dv(t)}{dt} + \frac{k}{m}v^2(t) = g\left(1 - \frac{m_0}{m}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

في النظام الدائم أين يكون $v = v_{\lim}$ ، $\frac{dv}{dt} = 0$ ، نكتب:

$$\frac{k}{m}v_{\lim}^2 = g\left(1 - \frac{m_0}{m}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

من (1) و (2) يكون:

$$\frac{dv(t)}{dt} + \frac{k}{m}v^2(t) = \frac{k}{m}v_{\lim}^2$$

2- تفسير تناقص التسارع:

عند اللحظة $t = 0$ ، تخضع الكرية لتأثير ثقلها $\vec{P}$ ودافعة أرخميدس $\vec{\Pi}$ ، جهة محصلتهما $\left(\vec{P} + \vec{\Pi}\right)$ تكون نحو الأسفل كون أن حركة الكرة كانت نحو الأسفل عند تركها، وأثناء ذلك تخضع الكرة إلى قوة ثالثة هي قوة الاحتكاك شدتها متزايدة $(f = kv^2)$ ومعاكسة لجهة الحركة، ما يجعل محصلة القوى الثلاث $\left(\vec{F} = \vec{P} + \vec{\Pi} + \vec{f}\right)$ تتناقص بمرور الزمن وبالتالي تتناقص قيمة التسارع $a = \frac{F}{m}$ حتى ينعدم كل منهما في النظام الدائم.

3- أ- حساب m كتلة الكرة و m_0 كتلة الهواء المزاح:

- $m = \rho_{CO_2}.V \Rightarrow m = \rho_{CO_2}.\frac{4}{3}.\pi.r^3 \Rightarrow m = 1{,}87 \times \frac{4}{3} \times \pi \times (0{,}1)^3 = 7{,}83 \times 10^{-3}\, kg$.
- $m_a = \rho_a.V \Rightarrow m_0 = \rho_a.\frac{4}{3}.\pi.r^3 \Rightarrow m = 1{,}12 \times \frac{4}{3} \times \pi \times (0{,}1)^3 = 4{,}69 \times 10^{-3}\, kg$

ب- حساب ثابت الاحتكاك k:

بيانيا:

المنحنى $a = f(v_{\lim}^2 - v^2)$ هو مستقيم معادلته من الشكل:

$$a = \alpha(v_{\lim}^2 - v^2)$$

حيث α هو ميل المستقيم (معامل التوجيه)، ومن البيان:

$$\alpha = \frac{(4-0)}{(4-0)} = 1$$

ومنه المعادلة الرياضية تصبح: $a=(v_{\lim}^2-v^2)$.

نظريا ومما سبق:

$$\frac{dv(t)}{dt}+\frac{k}{m}v^2(t)=\frac{k}{m}v_{\lim}^2 \Rightarrow a(t)=\frac{k}{m}v_{\lim}^2-\frac{k}{m}v^2(t) \Rightarrow a(t)=\frac{k}{m}\left(v_{\lim}^2-v^2(t)\right)$$

بمطابقة العلاقة النظرية بالعلاقة الرياضية نجد:

$$\frac{k}{m}=\alpha \Rightarrow k=\alpha.m \Rightarrow k=1\times 7,73\times 10^{-3}=7,73\times 10^{-3}\ Kg/m$$

– حساب التسارع الابتدائي a_0 للكرة:

التسارع يتناقص وبالتالي أكبر قيمة للتسارع هي التسارع الابتدائي a_0، ومن البيان: $a_0=4\,m/s^2$.

جـ- حساب قيمة السرعة الحدية $v_{\lim}$ للكرة:

مما سبق وجدنا بتطبيق القانون الثاني لنيوتن:

$$mg-m_0g-f(t)=m.a(t) \Rightarrow (m-m_0)g-k.v^2(t)=m.a(t)$$

في النظام الدائم أين: $v=v_{\lim}$، $a=0$، نكتب:

$$(m-m_0)g-k.v_{\lim}^2=0 \Rightarrow (m-m_0)g=k.v_{\lim}^2 \Rightarrow v_{\lim}=\sqrt{\frac{(m-m_0)g}{k}}$$

$$v_{\lim}=\sqrt{\frac{(7,83\times 10^{-3}-4,60\times 10^{-3})\times 10}{7,73\times 10^{-3}}}\simeq 2\,m/s$$

4– حساب سرعة الكرة في اللحظة $t=1,5\,s$ لو سقطت في الفراغ:

سقوط الكرة في الفراغ معناه $a=g=0$، ومنه:

$$\frac{dv}{dt}=10\,m/s^2 \Rightarrow v=10t+v_0$$

من الشروط الابتدائية لما $t=0$ يكون $v_0=0$، ومنه:

$$v=10t$$

عند اللحظة $t=1,5\,s$، نجد:

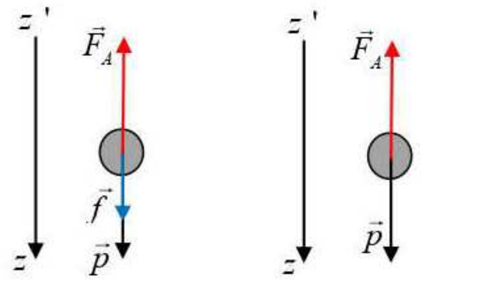
$$v=10\times 1,5=15\,m/s$$

5– أ– حساب شدة دافعة أرخميدس المؤثرة ثقل الكرة:

- $\Pi=m_0g=\rho_a.V.g \Rightarrow m_0=\rho_a.\frac{4}{3}.\pi.r^3.g \Rightarrow m=1,12\times\frac{4}{3}\times\pi\times(0,1)^3.10=4,69\times 10^{-2}\,kg$
- $m=\rho_{He}.V \Rightarrow m=\rho_{He}.\frac{4}{3}.\pi.r^3 \Rightarrow m=0,17\times\frac{4}{3}\times\pi\times(0,1)^3=7,12\times 10^{-3}\,kg$.

ب- تمثيل القوى المؤثرة على الكرة عند اللحظة $t = 0$، ثم بعد انطلاقها:

في هذه الحالة شدة دافعة أرخميدس أكبر من شدة قوة الثقل، إذن الكرة تصعد شاقوليا. وجهة قوة الاحتكاك أثناء الصعود تكون نحو الأسفل، وعليه يكون تمثيل القوى عند اللحظة $t = 0$، وبعد انطلاق الكرة المطاطية كما يلي:



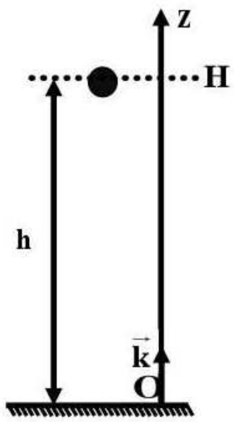
بعد الانطلاق   قبل الانطلاق (t=0)

التمرين (39) :

اهتم العالم الإيطالي غاليلي بدراسة حركة سقوط أجسام مختلفة، وقد تمت هذه الدراسة حسب بعض المصادر بتحرير أجسام من فوق برج بيزا ($tour\ de\ Pise$).

للتحقق من بعض النتائج المتوصل إليها، سندرس في هذا الجزء السقوط في الهواء لكرتين لهما نفس القطر وكتلتان حجميتان مختلفتان.

- ندرس حركة كل كرة في المعلم $(O\vec{k})$ الموجه شاقوليا نحو الأعلى والمرتبط بسطح الأرض والذي نعتبره غاليليا.
- يطبق الهواء على كل كرة قوة ننمذجها بقوة احتكاك $\vec{f}$، (نهمل دافعة أرخميدس)
- نقبل أن شدة الاحتكاك تكتب على الشكل: $f = 0,22 \cdot \rho_{air} \cdot \pi . R^2 \cdot v^2$ حيث ρ_{air} الكتلة الحجمية للهواء، R قطر الكرة و v قيمة سرعتها.
- لدراسة هاتين الحركتين تم استعمال كرتين متجانستين (a) و (b) دون سرعة ابتدائية من نفس القطر $R = 6cm$، وكتلتان حجميتان على التوالي: $\rho_{(a)} = 1,14 \times 10^4\ kg/m^3$، $\rho_{(b)} = 94\ kg/m^3$.
- عند نفس اللحظة $t = 0$ تم تحرير الكرتين (a) و (b) دون سرعة ابتدائية من نفس المستوى الأفقي الذي تنتمي إلى النقطة H.
- يوجد هذا المستوى على ارتفاع $h = 69\,m$ من سطح الأرض (الشكل6).



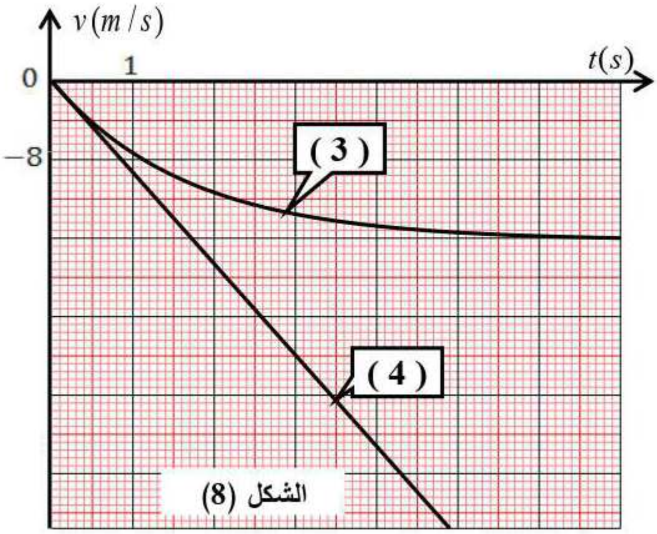
الشكل 06

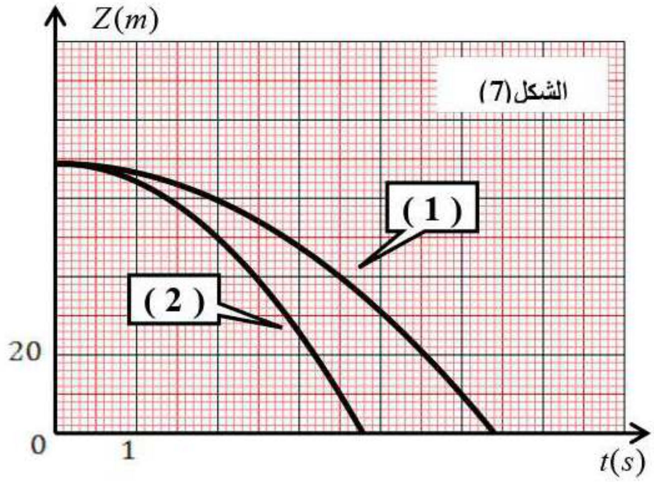
1- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن، بين أن المعادلة التفاضلية لسرعة الكرة تكتب بالشكل: $\frac{dv(t)}{dt} = -g + 0,165 \frac{\rho_{air}}{R.\rho_i}$.

حيث ρ_i الكتلة الحجمية للكرة (a) أو (b).

2- استنتج عبارة السرعة الحدية $v_{\lim}$ لحركة الكرة.

3- تمثل بيانات الشكلين (7) و (8) تغيرات كل من الفاصلة $z(t)$ والسرعة $v(t)$ بدلالة الزمن t.





أ- اعتمادا على عبارة السرعة الحدية، بين أن المنحنى (3) يوافق تغيرات سرعة الكرة (b).

ب- فسر لماذا يوافق المنحنى (2) تغيرات فاصلة الكرة (a).

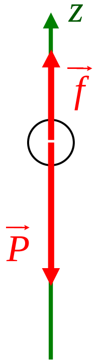
4- اعتمادا على المنحنى (4)، حدد طبيعة حركة الكرة (a) واكتب معادلتها الزمنية $z(t)$.

5- حدد قيمة الارتفاع بين مركزي الكرتين لحظة وصول الكرة الأولى سطح الأرض.

معطيات: حجم الكرة $V=\frac{4}{3}.\pi.R^3$، $g=9,8\,m.s^{-2}$، $\rho_{air}=1,3\,kg.m^{-3}$.

الحل المفصل:

1- تبيين بأن المعادلة التفاضلية لسرعة الكرة تكتب بالشكل: $\frac{dv(t)}{dt}=-g+0,165\frac{\rho_{air}}{R.\rho_i}$



- الجملة المدروسة: كرة.
- مرجع الدراسة: سطحي أرضي نعتبره غاليلي مزود بمعلم خطي $(o,\vec{k})$.
- القوى الخارجية المؤثرة: الثقل $\vec{P}$، قوة الاحتكاك $\vec{f}$.
- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن:

$$\sum \vec{F}_{ext}=m.\vec{a}_G$$
$$\vec{P}+\vec{f}=m.\vec{a}_G$$

بالإسقاط على محور الحركة (oz):

$$-P+f(t)=m.a(t)\Rightarrow -mg+0,22\cdot\rho_{air}\cdot\pi.R^2\cdot v^2(t)=m.\frac{dv(t)}{dt}$$

$$m.\frac{dv(t)}{dt}=-mg+0,22\cdot\rho_{air}\cdot\pi.R^2\cdot v^2(t)\Rightarrow\frac{dv(t)}{dt}=-g+\frac{0,22\cdot\rho_{air}\cdot\pi.R^2)}{m}\cdot v^2(t)$$

$$\frac{dv(t)}{dt}=-g+\frac{0,22\cdot\rho_{air}\cdot\pi.R^2}{\rho_i V}\cdot v^2(t) \Rightarrow \frac{dv(t)}{dt}=-g+\frac{0,22\cdot\rho_{air}\cdot\cancel{\pi}.\cancel{R^2}}{\rho_i\cdot\frac{4}{3}.\cancel{\pi}.R^{\cancel{3}}}\cdot v^2(t)$$

$$\frac{dv(t)}{dt}=-g+0,165.\frac{\rho_{air}}{R\rho_i}\cdot v^2(t)$$

2– استنتج عبارة السرعة الحدية $v_{\lim}$ لحركة الكرة:

عند النظام الدائم أين $v(\infty)=v_{\lim}$ ، $\frac{dv(\infty)}{dt}=0$ ، نكتب:

$$0=-g+0,165.\frac{\rho_{air}}{R\rho_i}.v_{\lim}^2 \Rightarrow g=0,165.\frac{\rho_{air}}{R\rho_i}.v_{\lim}^2 \Rightarrow v_{\lim}=\sqrt{\frac{g.R.\rho_i}{0,165.\rho_{air}}}$$

3– أ– تبيين أن المنحنى (3) يوافق تغيرات سرعة الكرة (b):

من المنحنى(3) توجد سرعة قيمة حدية لسرعة الكرية (b) قيمتها $v_{\lim}=-16\,m/s$ ، نتأكد من هذه القيمة حسابيا اعتمادا على عبارة السرعة الحدية السابقة:

$$v_{\lim}=\sqrt{\frac{9,8\times6\times10^{-1}\times94}{0,165\times1,3}}=16\,m/s$$

وبما أن سقوط الكرة معاكس للمحور الموجه (oz) ، نكتب: $v_{\lim}=-16\,m/s$ ، وهي نفس قيمة السرعة الحدية المتحصل عليها من المنحنى (3)، إذ المنحنى (3) يوافق تغيرات سرعة الكرة (b).

ب– تفسير لماذا يوافق المنحنى (2) تغيرات فاصلة الكرة (a):

بمقارنة الكتلة الحجمية للكرتين، نلاحظ:

$$\rho_{(a)}>\rho_{(b)} \Rightarrow m_{(a)}>m_{(b)}$$

أثناء السقوط الكرة الأثقل هي التي تستغرق زمن أقل للوصول إلى الأرض، ومنه: المنحنى (2) الذي يقطع محور الأزمنة في زمن أقل هو الموافق لتغيرات فاصلة الكرية (a).

4– تحديد طبيعة حركة الكرة (a):

المنحنى (4) الموافق لحركة الكرة (a) هو خط مستقيم يشمل المبدأ معادلته من الشكل: $v=\alpha t$ ، حيث $\alpha<0$ يمثل فيزيائيا تسارع الحركة للكرة، وكون أن سقوط الكرة معاكس للمحور الموجه (oz) أي $v<0$ يصبح $av>0$ ، وتكون حركة الكرة مستقيمة متسارعة بانتظام.

• كتابة المعادلة الزمنية $z(t)$ لحركة الكرة (a):

حركة الكرة (a) مستقيمة متسارعة بانتظام تساعها a ثابت، نحسب قيمته من المنحنى (4):

$$a=\frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow a=\frac{(0-5,7)\times8}{(4,9-0)}=-9,3\,m/s^2$$

ونكتب أيضا:

$$\frac{dv(t)}{dt}=-9,3m/s^2$$

بالتكامل نجد:

$$v(t)=-9,3t+v_0$$

من الشروط الابتدائية لما $t=0$ يكون $v_0=0$ ، ومنه:

$$v(t)=-9,3t$$

ونكتب أيضا:

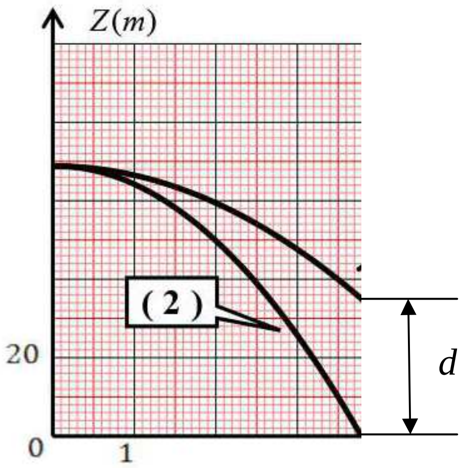
$$\frac{dz(t)}{dt}=-9,3t$$

بالتكامل نجد:

$$z(t)=-4,65t^2+z_0$$

من الشروط الابتدائية واعتمادا على المنحنى $z(t)$ ، لدينا $z_0=0$ ، ومنه:

$$z(t)=-4,65t^2+z_0$$

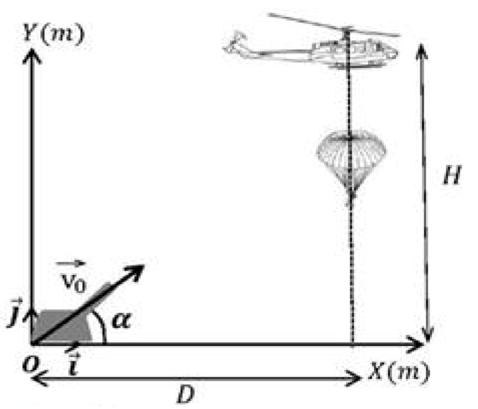


5- تحديد قيمة الارتفاع بين مركزي الكرتين لحظة وصول الكرة الأولى سطح الأرض:

تصل الكرة (a) إلى سطح الأرض عند اللحظة $t=3,8s$ ، عند هذه اللحظة تكون الكرة (a) على ارتفاع قدره:

$$d=1,7\times 10=34m$$

التمرين (40) :



تستعمل الطائرات المروحية في بعض العمليات العسكرية التي تستدعي انزال الجنود بالمظلات من أجل تنفيذ مهام قتالية محددة، غير انها تعتبر أهدافا سهلة المنال للدفاعات الأرضية المضادة.

I - دراسة السقوط الشاقولي في وجود احتكاك:

أثناء عملية الانزال تبقى الطائرة المروحية ثابتة على ارتفاع $h=405\ m$ من سطح الأرض، يرتمي الجندي بدون سرعة ابتدائية فتفتح مظلته بشكل آني، و يسقط في اتجاه شاقولي نحو الأرض، قوة الاحتكاك مع المائع (الهواء) هي من الشكل: $\vec{f}=-k\vec{v}$ ، ندرس حركة مركز عطالة الجملة (جندي+ مظلته) في المعلم $(o,\vec{i},\vec{j})$ مرتبط بالأرض والذي نعتبره غاليليا.

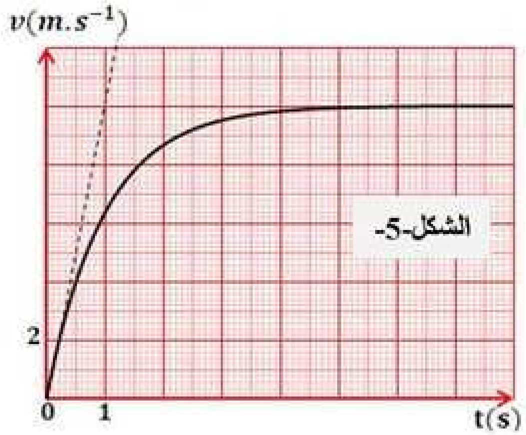
يعطى:

- كتلة الجندي ولوازمه: $m=100\ kg$.
- الجاذبية الأرضية $g=10\ m/s^2$.

1- نهمل دافعة أرخميدس بين أن المعادلة التفاضلية التي تحققها سرعة مركز عطالة الجملة هي: $\frac{dv(t)}{dt}+B\,v(t)=A$.

حيث A و B ثابتين يطلب إيجاد عبارتهما.

2- ما هو المدلول الفيزيائي لكل من الثابتين A و $\frac{1}{B}$ ؟



3- يمثل المنحنى الممثل بالشكل-5 تغيرات مركز عطالة الجملة المدروسة بدلالة الزمن ، حدد بيانيا:

أ- الزمن المميز τ، والسرعة الحدية $v_{\lim}$.

ب- التسارع الابتدائي a_0 .

4- استنتج قيمة معامل الاحتكاك k واذكر وحدته.

II – قصف المروحية بقذيفة مضادة:

عند رصد المروحية من طرف اجهزة الدفاع الأرضية تم تصويب مدفع القذائف المضادة نحو الهدف، يصنع اتجاه المدفع زاوية α مع المحور (ox)، تنطلق القذيفة بسرعة ابتدائية $v_0=200\ m/s$ من الموضع o.

1- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن، أوجد معادلة مسار القذيفة.

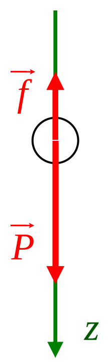
2- بين أن هناك قيمتين مختلفتين للزاوية α تتيحان اصابة الهدف.

يعطى: $D=1600\ m$ ، $\frac{1}{\cos^2\alpha}=1+\tan^2\alpha$.

3- احسب الزمن اللازم لإصابة الهدف من اجل كل زاوية، ثم استنتج زاوية القذف الملائمة.

الحل المفصل:

$I.3$. تبيين أن المعادلة التفاضلية التي تحققها سرعة مركز عطالة الجملة هي: $\frac{dv(t)}{dt}+B\,v(t)=A$:



- الجملة المدروسة: (جندي + مظلته)
- مرجع الدراسة: سطحي أرضي نعتبره غاليلي مزود بمعلم خطي $(o,\vec{k})$.
- القوة الخارجية المؤثرة: الثقل $\vec{P}$ ، قوة الاحتكاك $\vec{f}$.
- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن:

$$\sum \vec{F}_{ext}=m.\vec{a}_G$$
$$\vec{P}+\vec{f}=m.\vec{a}_G$$

بالإسقاط على محور الحركة (oz):

$$P-f=m.a \Rightarrow mg-kv^2=m\frac{dv}{dt}$$

$$m\frac{dv}{dt}+kv^2=mg \Rightarrow \frac{dv}{dt}+\frac{k}{m}v^2=g$$

بالمطابقة مع المعادلة التفاضلية المعطاة نجد: $A=g$ ، $B=\frac{k}{m}$.

2- المدلول الفيزيائي لكل من A و $\frac{1}{B}$:

لدينا: $\frac{dv}{dt}+Bv^2=A$ ، وعند اللحظة $t=0$ أين $v=0$ نكتب:

$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{(t=0)}=A \Rightarrow A=\left.\frac{dv}{dt}\right|_{(t=0)}=a_0$$

إذن المدلول الفيزيائي لـ A هو تسارع مركز عطالة الجملة عند اللحظة $t=0$.

3-أ- تحديد قيمتي الزمن المميز τ، والسرعة الحدية $v_{\lim}$:

من البيان مباشرة: $\tau=1s$ ، $v_{\lim}=10m/s$.

ب- تحديد قيمة التسارع الابتدائي a_0:

من البيان واعتمادا على ميل مماس المنحنى $v(t)$ عند اللحظة $t=0$ يكون:

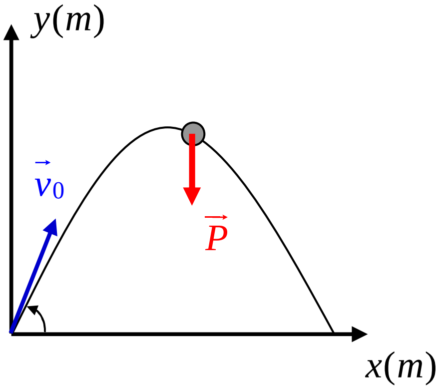
$$a_0=\frac{v_{\lim}}{\tau}=\frac{10}{1}=10m/s^2$$

4- استنتاج قيمة معامل الاحتكاك k:

من المعادلة التفاضلية:

$$\frac{1}{\tau}=\frac{k}{m} \Rightarrow k=\frac{m}{\tau}=\frac{100}{1}=100kg/s$$

II.1. إيجاد معادلة مسار القذيفة:



- الجملة المدروسة: (قذيفة)
- مرجع الدراسة: سطحي أرضي نعتبره غاليلي مزود بمعلم مستوي $(o,\vec{i},\vec{j})$.
- القوة الخارجية المؤثرة: الثقل $\vec{P}$.
- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن:

$$\sum F_{ext}=m.\vec{a}_G$$
$$\vec{P}=m.\vec{a}_G$$

بالإسقاط على المحورين (ox) و (oy):

$$\begin{cases}0=m.a_x\\-P=m.a_y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}0=m.a_x\\-m.g=m.a_y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_x=0\\a_y=-g\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{dv_x}{dt}=0\\\dfrac{dv_y}{dt}=-g\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}v_x=v_{0x}\\v_y=-gt+v_{0y}\end{cases}$$

بالتكامل نجد:

من الشروط الابتدائية:

$$\begin{cases}v_{x0}=v_0.\cos\alpha\\v_{0y}=v_0.\sin\alpha\end{cases}$$

ومنه:

$$\begin{cases}v_x=v_0.\cos\alpha\\v_y=-gt+v_0.\sin\alpha\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=v_0.\cos\alpha\\\dfrac{dy}{dt}=-gt+v_0.\sin\alpha\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=v_0.\cos\alpha t+x_0\\y=-\dfrac{1}{2}gt^2+v_0.\sin\alpha.t+y_0\end{cases}$$

من الشروط الابتدائية:

$$\begin{cases}x_0=0\\y_0=0\end{cases}$$

ومنه:

$$\begin{cases}x=v_0.\cos\alpha t\\y=-\dfrac{1}{2}gt^2+v_0.\sin\alpha.t\end{cases}$$

من المعادلة $x(t)$ $t=\dfrac{x}{v_0.\cos\alpha}$ ، بالتعويض في المعادلة $y(t)$:

$$y=-\frac{1}{2}g(\frac{x^2}{v_0^2.(\cos\alpha)^2}\grave{a}+v_0(\frac{x}{v_0.\cos\alpha})\Rightarrow y=-\frac{g}{2v_0^2.(\cos\alpha)^2}x^2+\tan\alpha.x$$

2– <u>تبيين أن هناك قيمتين مختلفتين للزاوية α تتيحان اصابة الهدف:</u>

عند موضع اصطدام القذيفة مع المروحية يكون: $x=D=1600\,m$ ، $y=H=405\,m$

بالتعويض في معادلة المسار:

$$405=\frac{-10\times(1600)^2}{2\times(200)^2\times(\cos\alpha)^2}+(1600\times\tan\alpha)$$

$$405=-320\times\frac{1}{(\cos\alpha)^2}+(1600.\tan\alpha)$$

$$405=-320.(1+(\tan\alpha)^2)+(1600.\tan\alpha)$$

$$405=-320-320.(\tan\alpha)^2+(1600.\tan\alpha)$$

$$405=-320-320.(\tan\alpha)^2+(1600.\tan\alpha)$$

$320.(\tan\alpha)^2-(1600.\tan\alpha)+(405+320)$

- $\Delta=(-1600)^2-4(320)(725)=1,632\times10^6 \Rightarrow \sqrt{\Delta}=1277,5$
- $\tan\alpha_1=\dfrac{1600-1277,5}{2\times320}=0,5 \Rightarrow \alpha_1\approx27°$
- $\tan\alpha_2=\dfrac{1600+1277,5}{2\times320}=4,5 \Rightarrow \alpha_2\approx77°$

3− حساب الزمن اللازم لإصابة الهدف من أجل كل زاوية، واستنتج زاوية القذف الملائمة:

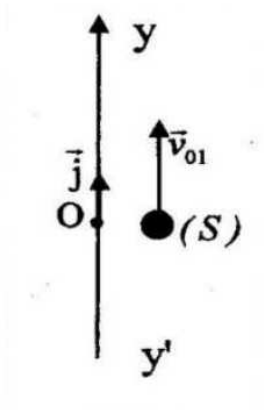
عند بلوغ الهدف يكون $x=D$ ، بالتعويض في المعادلة $x(t)$:

$$D=v_0.\cos\alpha.t \Rightarrow t=\frac{D}{v_0.\cos\alpha}$$

- $\alpha_1=27° \Rightarrow t_1=\dfrac{1600}{200\times\cos27°}=8,98\,s$
- $\alpha_2=77° \Rightarrow t_2=\dfrac{1600}{200\times\cos77°}=35,56\,s$

الزاوية الملائمة هي $\alpha_1=27°$ لأنها توافق زمن الأصغر لإصابة الهدف.

التمرين (41) :



الشكل 1

يشكل السقوط الحر للأجسام الصلبة في الهواء من الحركات التي تتعلق طبيعتها ومساراتها بالشروط الابتدائية. تمكن دراسة هذه الحركات من تحديد بعض المقادير المميزة لها وربطها بتطبيقات من المحيط.

يهدف هذا التمرين إلى دراسة حركة السقوط الحر لكرية (S) بالنسبة لاتجاهات مختلفة لجهة شعاع السرعة الابتدائية.

- جميع الاحتكاكات مهملة.
- $g=10\ m/s^2$.

I− حركة السقوط الحر الشاقولي لكرية:

ندرس حركة مركز العطالة G للكرية (S) ذات الكتلة m في معلم $(O,\vec{j})$ مرتبط بالأرض نعتبره غاليليا.

من الموضع O مبدأ الفواصل نقذف شاقوليا نحو الأعلى عند اللحظة $t=0$ الكرية (S) بسرعة ابتدائية قيمتها $v_{01}=5\ m.s^{-1}$ (الشكل−1).

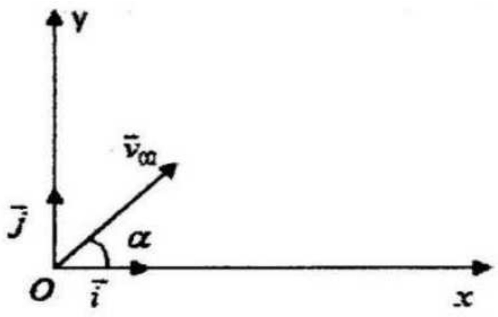
1− بتطبيق القانون الثاني لنيوتن، أثبت أن المعادلة التفاضلية التي يحققها $y(t)$ هي: $\dfrac{d^2y}{dt^2}=-g$.

2− جِدْ المعادلتين الزمنيتين $v(t)$، $y(t)$.

3− احسب قيمة y عند أعلى موضع يبلغه مركز العطالة G .

II– حركة السقوط الحر في مستوي:

نقذف من جديد، من الموضع O، الكرية (S) السابقة بسرعة ابتدائية v_{02} يصنع شعاعها زاوية α من الخط الأفقي. ندرس حركة مركز العطالة G للكرية (S) في المعلم $(O,\vec{j},\vec{k})$ مرتبط بالأرض نعتبره غاليليا (الشكل2).

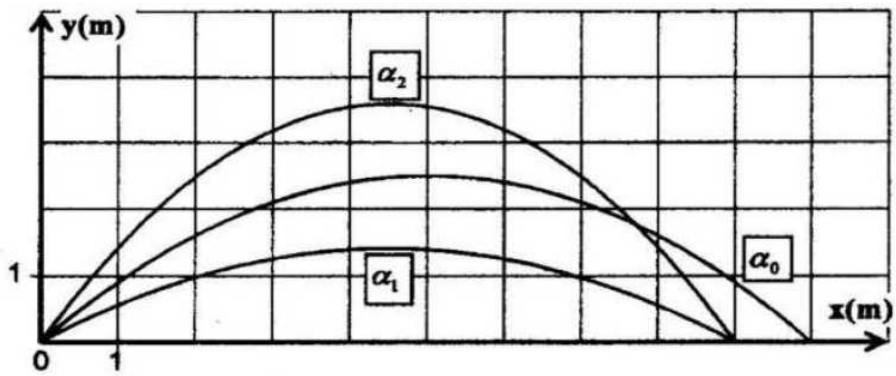


الشكل 2

1– بتطبيق القانون الثاني لنيوتن، أكتب المعادلات الزمنية للحركة وكذا معادلة المسار.

2– بين أن المدى يعبر عنه بالعلاقة: $x_p = \dfrac{v_{02}^2.\sin(2\alpha)}{g}$.

3– باستعمال برمجيات مناسبة، ثم الحصول على وثيقة (الشكل–3) الممثلة لمسارات حركة مركز العطالة G بالنسبة لنفس قيمة السرعة الابتدائية v_{02} ولزوايا القذف α حيث $\alpha_0 = 45°$.



الشكل 3

أ– استنتج قيمة v_{02}.

ب– حدد قيمة الزاوية α_1. استنتج قيمة الزاوية α_2 علما أن: $\alpha_1 + \alpha_2 = 90°$ و $\alpha_2 > \alpha_1$.

جـ– عند الذروة تكون سرعة G القيمة v_1 بالنسبة لزاوية القذف α_1 والقيمة v_2 بالنسبة لزاوية القذف α_2. اختر الجواب الصحيح من بين الأجوبة التالية: $v_1 = 0,4\ v_2$ ،$v_1 = 0,8\ v_2$ ،$v_1 = 1,6\ v_2$ ،$v_1 = 3,2\ v_2$.

الحل المفصل:

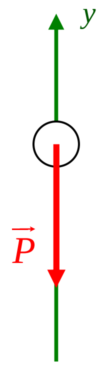
I–1– أثبات أن المعادلة التفاضلية التي يحققها $y(t)$ هي $\dfrac{d^2y}{dt^2} = -g$:

– الجملة المدروسة: كرية (S).

– مرجع الدراسة: سطحي أرضي نعتبره غاليلي مزود بمعلم خطي $(o,\vec{i})$.

– القوة الخارجية المؤثرة: الثقل $\vec{P}$.

– بتطبيق القانون الثاني لنيوتن:



$$\sum \vec{F}_{ext} = m.\vec{a}_G \Rightarrow \vec{P} = m.\vec{a}_G$$

بالإسقاط على المحور (oy):

$$-P = m.a \Rightarrow -\cancel{m}.g = \cancel{m}\frac{d^2y}{dt^2} \Rightarrow \frac{d^2y}{dt^2} = -g$$

2- إيجاد جدْ المعادلتين الزمنيتين $v(t)$ ، $y(t)$:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -g$$

بالتكامل نجد:

$$\frac{dy}{dt} = -gt + v_0 \Rightarrow v = -gt + v_0$$

من الشروط الابتدائية $v_0 = v_{01}$ ، ومنه:

$$v = -gt$$

نكتب أيضا:

$$\frac{dy}{dt} = -gt$$

بالتكامل:

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + y_0$$

من الشروط الابتدائية $y_0 = 0$ ، ومنه:

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t$$

3- حساب قيمة y عند أعلى موضع يبلغه مركز العطالة G:

الطريقة الأولى: (محذوفية الزمن)

$$v^2 - {v_{01}}^2 = 2a(y - y_0) \Rightarrow 0^2 - v^2 = 2a(y - (0)) \Rightarrow y = \frac{-v_{01}^2}{2a}$$

وحيث أن $a = -g = -10\ m/s^2$ ، يكون:

$$y = \frac{-5^2}{2(-10)} = 1,25m$$

الطريقة الثانية: من المعادلة الزمنية للحركة $y(t)$:

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t \Rightarrow y = -\frac{1}{2}.10.t^2 + 5t \Rightarrow y = -5.t^2 + 5t$$

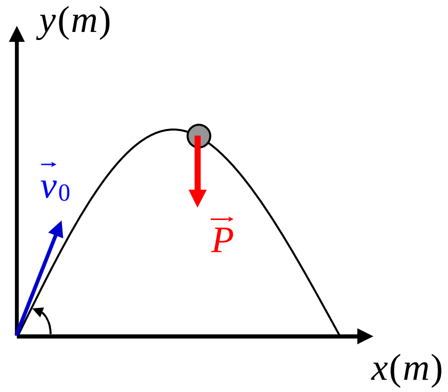
عند بلوغ أقصى ارتفاع يكون $v = 0$ بالتعويض في $v(t)$:

$$0 = -10t + 5 \Rightarrow 10t = 5 \Rightarrow t = 0,5s$$

بالتعويض في $y(t)$:

$$y = -5(0,5)^2 + (5 \times 0,5) = 1,25\ m$$

$II-1-$ كتابة المعادلات الزمنية ومعادلة المسار :



– الجملة المدروسة: جسم (S).

– مرجع الدراسة: سطحي أرضي نعتبره غاليلي، مزود بمعلم متعامد $(o,\vec{i},\vec{j})$.

– القوى الخارجية المؤثرة: الثقل $\vec{P}$.

– بتطبيق القانون الثاني لنيوتن:

$$\sum \vec{F}_{ext} = m.a_G \Rightarrow \vec{P} = m.a_G$$

بالإسقاط على المحورين المحورين (ox)، (oz):

$$\begin{cases} 0 = m.a_x \\ -P = m.a_y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = m.a_x \\ -m.g = m.a_y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dv_x}{dt} = 0 \\ \dfrac{dv_y}{dt} = -g \end{cases}$$

بالتكامل نجد:

$$\begin{cases} v_x = v_{0x} \\ v_y = -gt + v_{0y} \end{cases}$$

من الشروط الابتدائية:

$$\begin{cases} v_{0x} = v_{02}.\cos\alpha \\ v_{0y} = v_{02}.\sin\alpha \end{cases}$$

يصبح:

$$\begin{cases} v_x = v_{02}.\cos\alpha \\ v_y = -gt + v_{02}.\sin\alpha \end{cases}$$

نكتب أيضا:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = v_{02}.\cos\alpha \\ \dfrac{dy}{dt} = -gt + v_{02}.\sin\alpha \end{cases}$$

بالتكامل نجد:

$$\begin{cases} x = v_{02}.\cos\alpha t + x_0 \\ y = -\dfrac{1}{2}gt^2 + v_{02}.\sin\alpha.t + y_0 \end{cases}$$

من الشروط الابتدائية:

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \end{cases}$$

يصبح:

$$\begin{cases} x = v_{02}.\cos\alpha t \\ y = -\dfrac{1}{2}gt^2 + v_{02}.\sin\alpha.t \end{cases}$$

من المعادلة $x = f(t)$ لدينا $t = \dfrac{x}{v_{02}.\cos\alpha}$، بالتعويض في المعادلة $y(t)$:

$$y = -\frac{1}{2}g(\frac{x}{v_{02}.\cos\alpha})^2 + \sin\alpha.(\frac{x}{v_{02}.\cos\alpha}) \Rightarrow y = -\frac{g}{2.v_{02}^2.(\cos\alpha)^2}x^2 + \tan\alpha.x$$

2- تبيين أن المدى يعبر عنه بالعلاقة $x_p = \dfrac{v_{02}^2.\sin(2\alpha)}{g}$:

عند بلوغ المدى يكون $(x = x_P, y = 0)$، بالتعويض في معادلة المسار:

$$0 = -\frac{g}{2v_{02}^2.\cos\alpha^2}x_p{}^2 + \tan\alpha.x_p \Rightarrow \frac{g}{2v_{02}^2.\cos\alpha^2}x_p{}^2 = \tan\alpha.x_p$$

$$\frac{g}{2v_{02}^2.\cos\alpha^2}x_p = \tan\alpha \Rightarrow g.x_p = 2v_{02}^2.\cos\alpha^2.\tan\alpha$$

$$gx_p. = 2v_{02}^2.\cos\alpha^2.\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow g.x_p = 2v_{02}^2.\cos\alpha.\sin\alpha \Rightarrow g.x_p = v_{02}^2.(2\cos\alpha.\sin\alpha)$$

نعلم أن: $sin2\alpha = 2\ cos\alpha.sin\alpha$، ومنه يصبح:

$$g.x_p = v_{02}^2.\sin 2\alpha \Rightarrow x_p = \frac{v_{02}^2.\sin 2\alpha}{g}$$

3- أ- استنتاج قيمة v_{02} :

اعتمادا على عبارة x_P السابقة:

$$g.x_p = v_{02}^2.\sin 2\alpha \Rightarrow v_{02} = \sqrt{\frac{g.x_p}{\sin 2\alpha}}$$

اعتمادا على الوثيقة من أجل $\alpha_0 = 45°$ يكون $x_P = 10\ m$، بالتعويض:

$$v_{02} = \sqrt{\frac{10\times 10}{\sin(2\times 45)}} = 10\,m/s$$

ب- حدد قيمة الزاوية α_1 و استنتاج قيمة الزاوية α_2 :

بالاعتماد على عبارة x_P السابقة:

$$g.x_p = v_{02}^2.\sin 2\alpha \Rightarrow \sin 2\alpha = \frac{g.x_p}{v_{02}^2}$$

لدينا من أجل α_1 ، α_2 يكون: $x_P = 9\ m$، بالتعويض:

$$\sin 2\alpha = \frac{10\times 9}{10^2} \Rightarrow \sin 2\alpha = 0,9$$

$$\begin{cases} 2\alpha_1 = 64° \\ 2\alpha_2 = 180° - 64° = 116° \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 32° \\ \alpha_2 = 58° \end{cases}$$

جـ- اختيار الجواب الصحيح:

لدينا سابقا:

$$\begin{cases} v_x = v_0.\cos\alpha \\ v_y = -gt + v_0.\sin\alpha \end{cases}$$

لدينا: $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ ، عند الذروة (S) : $v_{yS} = 0$ ، ومنه:

$$\begin{cases} v_{xS} = v_{02}.\cos\alpha \\ v_{yS} = 0 \end{cases} \Rightarrow v_S = \sqrt{(v_{02}.\cos\alpha)^2 + 0} \Rightarrow v_S = v_{02}.\cos\alpha$$

- $\alpha_1 \rightarrow v_1 = v_{02} cos\alpha_1$
- $\alpha_2 \rightarrow v_2 = v_{02} cos\alpha_2$

بقسمة v_1 على v_2:

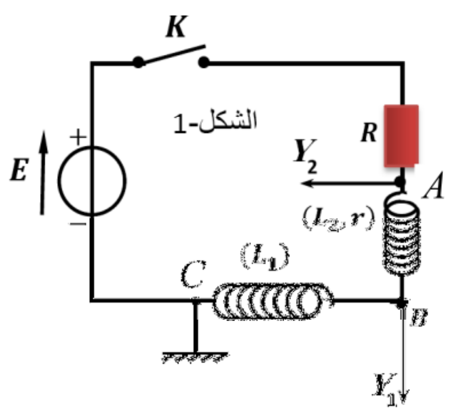
$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{v_{02}\cos\alpha_1}{v_{02}\cos\alpha_2} \Rightarrow \frac{v_1}{v_2} = \frac{\cos\alpha_1}{\cos\alpha_2} \Rightarrow v_1 = \frac{\cos\alpha_1}{\cos\alpha_2}.v_2$$

$$v_1 = \frac{\cos 32°}{\cos 58°}.v_2 \Rightarrow v_1 = 1,6.v_2$$

التمرين (42) :

يتكون التركيب الممثل في (الشكل1) من:

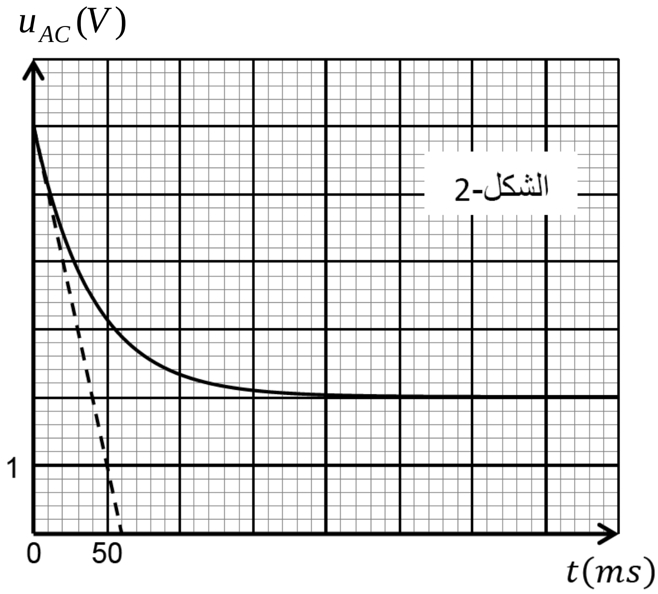
- مولد كهربائي للتوتر قوته المحركة الكهربائية $E = 6V$ ،
- وشيعة مثالية b_1 ذاتيتها L_1 ووشيعة b_2 حقيقية ذاتيتها L_2 ومقاومتها الداخلية r ،
- ناقل أومي مقاومته $R = 10\,\Omega$ ،
- قاطعة K.

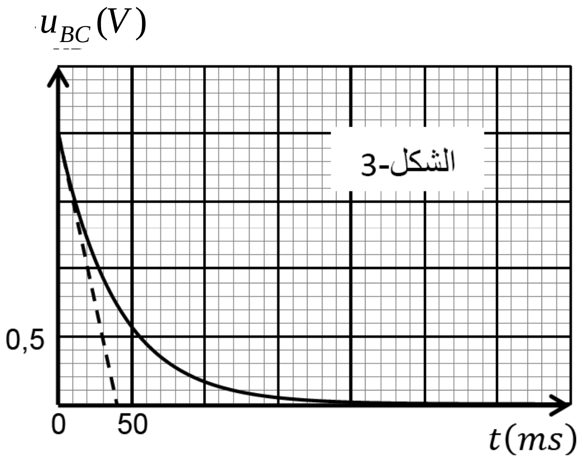


عند $t = 0$ تم غلق القاطعة K وتتبع تطور التوترين u_{AB} بين طرفي الوشيعة b_1 و u_{AC} بين طرفي الوشيعتين $(b_1 + b_2)$ بدلالة الزمن.

يمثل (الشكل2) و(الشكل3) منحنى التوترين $u_{AB}(t)$ و $u_{AC}(t)$.

1- اثبت أن المعادلة التفاضلية التي يحققها شدة التيار $i(t)$ المار بالدارة من الشكل: $\frac{di(t)}{dt} + \frac{R+r}{L_1+L_2} i(t) = \frac{E}{L_1+L_2}$.





2- يُعطى حل المعادلة التفاضلية السابقة بالشكل: $i(t)=A+Be^{-\frac{t}{\tau}}$، حيث A، B و τ ثوابت يطلب كتابة عباراتهم. بدلالة ثوابت الدارة.

3- ما المدلول الفيزيائي لثابت الزمن τ ثم استنتج قيمته.

4- احسب قيمة I_0 الشدة الأعظمية للتيار المار في الدارة.

5- جِدْ العبارة اللحظية للتوتر u_{BC} بين طرفي الوشيعة b_1 بدلالة t، I_0 و τ .

7- باستغلال المنحنيين البيانيين، جِدْ قيم المقادير r، L_1 و L_2 .

الحل المفصل:

I- إثبات أن المعادلة التفاضلية التي يحققها شدة التيار $i(t)$ المار بالدارة من الشكل: $\frac{di(t)}{dt}+\frac{R+r}{L_1+L_2}i(t)=\frac{E}{L_1+L_2}$:

حسب قانون جمع التوترات:

$$u_{b1}(t)+u_{b2}(t)+u_R(t)=E$$

$$L_1\frac{di(t)}{dt}+L_2\frac{di(t)}{dt}+r.i(t)+R.i(t)=E$$

$$(L_1+L_2)\frac{di(t)}{dt}+(r+R).i(t)=E \Rightarrow \frac{di(t)}{dt}+\frac{r+R}{L_1+L_2}i(t)=\frac{E}{L_1+L_2}$$

2- التحقق من أن حل المعادلة التفاضلية السابقة بالشكل $i(t)=A+Be^{-\frac{t}{\tau}}$، وكتابة عبارات A، B و τ:

- $i(t)=A+Be^{-\frac{t}{\tau}}$
- $\frac{di(t)}{dt}=-\frac{B}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية:

$$-\frac{B}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}+\frac{R+r}{L_1+L_2}\left(A+Be^{-\frac{t}{\tau}}\right)=\frac{E}{L_1+L_2}$$

$$-\frac{B}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}+\frac{(R+r)A}{L_1+L_2}+\frac{(R+r)B}{L_1+L_2}e^{-\frac{t}{\tau}}=\frac{E}{L_1+L_2}$$

$$Be^{-\frac{t}{\tau}}\left(-\frac{1}{\tau}+\frac{R+r}{L_1+L_2}\right)+\frac{(R+r)A}{L_1+L_2}=\frac{E}{L_1+L_2}$$

لكي تتحقق المساواة يجب أن يكون:

- $-\frac{1}{\tau}+\frac{R+r}{L_1+L_2}=0 \Rightarrow \frac{1}{\tau}=\frac{R+r}{L_1+L_2} \Rightarrow \tau=\frac{L_1+L_2}{R+r}$
- $\frac{(R+r)A}{L_1+L_2}=\frac{E}{L_1+L_2} \Rightarrow A=\frac{E}{R+r}=I_0$

من الشروط الابتدائية:

$$t=0 \Rightarrow i(0)=0$$

بالتعويض في عبارة حل المعادلة التفاضلية، نجد:

$$0=A+Be^{-\frac{0}{\tau}} \Rightarrow A+B=0 \Rightarrow B=-A \Rightarrow B=-\frac{E}{R+r}=-I_0$$

3- ما المدلول الفيزيائي لثابت الزمن τ:

هو الزمن اللازم لبلوغ شدة التيار الذي يجتاز الوشيعة، 63% من قيمته الأعظمية.

● قيمة ثابت الزمن τ:

من أحد البيانين من خلال المماس عند اللحظة $t=0$ يكون:

$$\tau=0{,}8\times 50=40\,ms$$

4- حساب قيمة I_0 الشدة الأعظمية للتيار المار في الدارة:

حسب قانون جمع التوترات:

$$u_R(t)+u_{AC}(t)=E \Rightarrow R.i(t)+u_{AC}(t)=E$$

في النظام الدائم أين $i(0)=I_0$، نكتب:

$$RI_0+u_{AC}(\infty)=E \Rightarrow RI_0=E-u_{AC}(\infty) \Rightarrow I_0=\frac{E-u_{AC}(\infty)}{R}$$

من بيان الشكل2، لدينا: $u_{AC}(\infty)=2V$، ومنه:

$$I_0=\frac{6-2}{10}=0{,}4\,A$$

5- إيجاد العبارة اللحظية للتوتر u_{BC} بين طرفي الوشيعة b_1 بدلالة t، I_0 و τ:

$$u_{BC}(t)=u_{b1}(t) \Rightarrow u_{BC}(t)=L_1\frac{di(t)}{dt}$$

اعتمادا على ما سبق يكون:

- $i(t)=A+Be^{-\frac{t}{\tau}} \Rightarrow i(t)=I_0-I_0e^{-\frac{t}{\tau}} \Rightarrow i(t)=I_0(1-e^{-\frac{t}{\tau}})$.
- $\dfrac{di(t)}{dt}=I_0\left(0-(-\dfrac{1}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}})\right) \Rightarrow \dfrac{di(t)}{dt}=\dfrac{I_0}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}$

ومنه يصبح:

$$u_{BC}=L_1.\frac{I_0}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}} \Rightarrow u_{BC}(t)=\frac{L_1I_0}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}$$

7- إيجاد قيم المقادير r، L_1 و L_2:

- قيمة r:

$$I_0=\frac{E}{R+r} \Rightarrow R+r=\frac{E}{I_0} \Rightarrow r=\frac{E}{I_0}-R \Rightarrow r=\frac{5}{0,4}-10=5\Omega$$

- قيمة L_1:

من العبارة السابقة $u_{BC}(t)=\dfrac{L_1I_0}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}$، نكتب عند اللحظة $t=0$:

$$u_{BC}(0)=\frac{L_1I_0}{\tau} \Rightarrow L_1=\frac{\tau.u_{BC}(0)}{I_0}$$

من بيان الشكل-2، لدينا: $u_{BC}(0)=2V$، ومنه:

$$L_1=\frac{40\times10^{-3}\times4}{0,4}=0,2\,H$$

- قيمة L_2:

$$\tau=\frac{L_1+L_2}{R+r} \Rightarrow \tau(R+r)=L_1+L_2 \Rightarrow L_2=\tau(R+r)-L_1$$

$$L_2=40\times10^{-3}\times(10+5)-L_1=0,6\,H$$